BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*.

E. PICARD.

P. APPELL.

E. BOREL.

N.....

A. GUILLET, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Ernest Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, rue des Écoles, 4 *bis*, Paris, 5e.

55432 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins

P. C
M & Tn
3.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,
AVEC LA COLLABORATION DE
MM. APPELL, E. CARTAN, J. DRACH, P. DUHEM, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, ER. LEBON, G. LORIA, S. RINDI, H. G. ZEUTHEN, ETC.,
Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY;
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.
TOME XXXIX. — ANNÉE 1915.
(L^e VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179883
24/4/23

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1915

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci39fran

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DUHEM (P.). — Le Système du Monde. *Histoire des Doctrines cosmologiques de Platon à Copernic.* T. II. 1 vol. gr. in-8, IV-522 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1914 (1).

Juger un Ouvrage après la lecture de ses différents volumes, faite au fur et à mesure qu'ils paraissent, est une tâche très difficile et extrêmement dangereuse; le critique qui doit la remplir, en en mesurant toutes les difficultés, songe avec regret aux époques, moins empressées que la nôtre, où chaque Ouvrage, quelle que fût son étendue, se présentait complet aux yeux des lecteurs (2). Je remarque cela dès le début de ce compte rendu, car, après l'examen du Tome II de la grande publication de M. Duhem, le plan des recherches de ce savant apparaît un peu plus clair que lorsqu'on

(1) Pour ne pas nous répéter, nous nous permettons de renvoyer le lecteur, pour tout ce qui se rapporte aux caractères généraux de la méthode d'exposition de M. Duhem, à notre compte rendu du Tome I, et plus précisément au dernier alinéa de la page 194 du Tome XXXVIII de ce *Bulletin*.

(2) Nous nous bornons à citer comme exemples de ce système à présent démodé l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler, dont les deux Tomes parurent tous les deux en 1748, et le *Développement nouveau sur la partie élémentaire des Mathématiques*, par L. Bertrand, formé de deux gros Volumes portant la date de 1778.

n'avait sous les yeux que le premier; en effet, celui-ci se compose de huit Chapitres, qui sont des éléments d'une grande section ayant pour titre : Première Partie. *La Cosmologie hellénique.* Les sujets de ces Chapitres (il est bon de le rappeler) sont : L'astronomie pythagoricienne; La cosmologie de Platon; Les sphères homocentriques; La physique d'Aristote; Les théories du temps, du lieu et du vide après Aristote; La dynamique des Hellènes après Aristote; Les astronomes héliocentriques; L'astronomie des excentriques et des épicycles. Or, rien n'autorisait à assurer que ces Chapitres épuisaient cette première Partie; car si, d'un côté, on devait reconnaître que les plus grands penseurs de la Grèce avaient été considérés par l'illustre historien de Bordeaux, on savait d'ailleurs que la largeur de ses vues et la profondeur de ses connaissances pouvaient bien ménager les plus agréables surprises. Et, en effet, les quatre cinquièmes de son Tome II sont occupés par cinq longs Chapitres destinés à compléter l'exposé de ce qui se rapporte à la cosmologie hellénique. Remarquons tout de suite que, pour fournir un tableau tout à fait complet des recherches sur ce sujet, M. Duhem a invoqué les témoignages, non seulement des écrivains grecs, mais aussi de leurs élèves directs, quelle que fût la langue qu'ils employèrent. Ce point fixé, voici les titres des Chapitres qui épuisent la première Partie de l'Ouvrage que nous avons sous les yeux : IX. Les dimensions du monde; X. Physiciens et astronomes (I. Les Hellènes); XI. Physiciens et astronomes (II. Les Sémites); XII. La précession des équinoxes; XIII. La théorie des marées et l'Astrologie.

Nous allons parcourir ces Chapitres en signalant quelques-unes des choses qui nous ont le plus frappé, quitte à rédiger après un bilan des résultats dont l'Astronomie est redevable aux épigones des grands savants de la Grèce.

Toute évaluation des dimensions du monde où nous vivons a nécessairement comme point de départ la mesure de la Terre; c'est un fait qui a été constaté dès l'aube de la recherche astronomique; en effet, plusieurs savants grecs essayèrent de mesurer la planète que nous habitons; Ératosthène de Cyrène a été singulièrement heureux dans les efforts qu'il fit dans ce but, peu après la mort d'Archimède, car il évalua le méridien terrestre à 39375^{km},

tandis que (tout le monde le sait) il est de 40000^{km}. Un contraste frappant avec ce résultat si positif est offert par les élucubrations de Pythagore et de ses disciples sur la musique céleste dans ses relations avec les distances des astres à la Terre; M. Duhem est trop bon physicien pour attribuer à ces rêves une valeur scientifique réelle; toutefois il remarque avec finesse que le désir de soumettre les intervalles des corps célestes à des règles mathématiques harmonieuses n'a pas provoqué des tentatives seulement de la part des savants de l'Antiquité, car Kepler reprit plus tard des essais analogues et, par cette voie si peu sûre, fut amené à l'une des trois lois qui régissent notre système planétaire. Il ajoute que les célèbres lois qui portent les noms de Bode et de Mendélejef et qui jouèrent un rôle si suggestif au cours du XIXe siècle montrent que l'esprit pythagoricien persiste en pleine vie jusqu'à nos jours.

Les recherches d'Aristarque de Samos sur la distance et la grandeur du Soleil et de la Lune et celles d'Hipparque et de Ptolémée sur la parallaxe lunaire eurent une base plus solide et une direction plus scientifique, quoique les conclusions qu'elles donnèrent s'écartent tellement de celles auxquelles on arrive par les méthodes modernes que leur valeur est désormais purement historique. La même chose doit se répéter relativement aux recherches sur des sujets analogues accomplies par d'autres astronomes grecs ou arabes, recherches que M. Duhem analyse avec son ordinaire soin dans le premier Chapitre de son nouveau Volume. Toutefois, l'historien doit remarquer que, en dépit des nombreuses erreurs dans lesquelles ils sont tombés, les astronomes de l'Islam étaient parvenus à reconnaître une importante vérité : c'est qu'il y a des planètes plus petites et des planètes plus grandes que la Terre, mais qu'il n'y en a aucune qui soit immensément plus petite ou plus grande que le globe habité par les hommes.

« Le système d'Hipparque et de Ptolémée contredisait expressément aux principes essentiels de la Physique péripatéticienne. Selon cette Physique, la nature même de la cinquième essence, de l'essence céleste, exempte de génération et de corruption, exigeait que tout corps formé de cette essence se mût d'un mouvement circulaire et uniforme. D'ailleurs toute rotation circulaire et uni-

forme devait forcément, en son centre, trouver un corps immobile et grave. Une telle Physique imposait donc, de toute nécessité, à la théorie astronomique, une force bien définie; il fallait que tous les mouvements célestes se pussent décomposer en rotations uniformes de sphères et que ces sphères fussent homocentriques à la Terre immobile. » Un grand nombre d'efforts ont été tentés par les Hellènes et les Sémites pour faire tomber cette contradiction et établir un accord entre deux directions scientifiques opposées, et le but que s'est proposé M. Duhem dans les Chapitres X et XI de son Ouvrage est précisément d'exposer les recherches qu'on fit dans cette direction à une époque où toute idée n'étant pas en accord complet avec l'esprit de la philosophie d'Aristote était au moins suspecte.

Au début de son exposé, l'Auteur s'arrête assez longtemps à étudier les opinions qu'avaient les anciens sur la valeur des hypothèses astronomiques; il insiste avec raison sur ce fait remarquable que, pour les anciens Grecs, Ptolémée non exclu, l'objet propre de l'Astronomie consiste exclusivement à établir des hypothèses au moyen desquelles on parvienne à *sauver les apparences* (σώζειν τα φαινόμενα); c'est un principe de philosophie scientifique bien libéral et dont on reconnaît sans peine la ressemblance profonde avec les données fondamentales du système de Poincaré ([1]). M. Duhem fait connaître d'abord les opinions qu'on avait avant Ptolémée sur la valeur des hypothèses astronomiques et qui résultent des témoignages de Platon et d'Aristote; ensuite celles qu'on trouve dans deux des Ouvrages de l'auteur de l'*Almageste* qui nous ont été conservés; enfin celles des Néo-Platoniciens (Syrianus et Proclus), de Jean Philipon et de Simplicius.

Tandis que le Chapitre X fournit des détails on ne peut plus intéressants sur l'évolution de l'Astronomie chez les Grecs, le suivant nous permet de mesurer l'accueil que reçurent les idées de Ptolémée de la part des peuples qui sont considérés comme les petits-neveux de Sem. M. Duhem remarque qu'en général les Arabes n'ont pas reçu en partage la prodigieuse ingéniosité des

---

([1]) Qu'il nous suffise de citer à l'appui de ce rapprochement la phrase suivante qu'on lit dans *La Science et l'Hypothèse* (p. 66-67): « Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre; elle peut seulement être *plus commode* ».

Grecs; ils n'ont apporté que de bien minces perfectionnements aux hypothèses par lesquelles l'Astronomie hellène était parvenue à résoudre en mouvements simples la marche compliquée des planètes. Et d'autre part, lorsqu'ils ont examiné ces hypothèses, lorsqu'ils ont tenté d'en découvrir la véritable nature, leur vue n'a pu égaler en pénétration celle d'un Posidonius, d'un Ptolémée, d'un Proclus ou d'un Simplicius; esclaves de l'imagination, ils ont cherché à voir et à toucher ce que les penseurs grecs avaient déclaré purement fictif et abstrait; ils ont voulu réaliser, en des sphères solides roulant au sein des cieux, les excentriques et les épicycles que Ptolémée et ses successeurs donnaient comme des artifices de calcul; mais, dans cette œuvre même, ils n'ont fait que copier Ptolémée. Pour découvrir un auteur qui ait discuté la nature des mécanismes conçus par Ptolémée, il nous faut franchir un long intervalle de temps et arriver jusqu'à la fin du IXe siècle. » A cette époque, le célèbre Thâbit ben Kourrah composa un Traité dans lequel il s'efforçait d'attribuer aux Cieux une constitution physique qui pût s'accorder avec le système astronomique de Ptolémée. Quoique ce Traité nous soit connu seulement par les renseignements fournis par Moïse Maimonide et Albert le Grand, on peut dire qu'il était caractérisé par la tendance de dépouiller les hypothèses de Ptolémée de leur forme abstraite pour les réaliser à l'aide de corps solides ou fluides. Or, cette tendance s'est conservée chez les astronomes arabes postérieurs; c'est ce qu'on voit dans le *Résumé d'Astronomie* de Al Hassan ben al Hassan ben al Haitam Abou Ali (c'est le savant que tout le monde connaît sous le nom abrégé de Alhalazen).

Ce réalisme outré devait nécessairement provoquer les Péripatéticiens de l'Islam à une lutte ardente contre les doctrines qui servent de base à l'*Almageste*. « Au XIIe siècle, nous voyons cette lutte, vivement menée par les plus illustres des penseurs arabes, par Ibn Bâdja (Avempace), par Ibn Tefaïl (Aboubekr), par Ibn Rochd (Averroès), par Moïse ben Maimoun (Maimonide), produire un système astronomique, le système d'Al Bitrogi (Alpetragius), qui, jusqu'au XVIe siècle, tentera sans cesse de se substituer au système de Ptolémée. » L'analyse de ces Ouvrages, qui, ayant été traduits en latin, inspirèrent les adversaires latins de

Ptolémée et frayèrent la voie à Copernic, remplit la meilleure partie du Chapitre XI de l'Ouvrage de M. Duhem. Dans ce Chapitre on trouve encore l'exposé de la matière composant les *Neuf Livres d'Astronomie;* c'est un Ouvrage qui porte le nom d'un Arabe (Djeber ben Aflah), mais qui n'est, en réalité, que la traduction d'un Traité grec; voilà un résultat important auquel M. Duhem arrive en appliquant un critère philologique dû à Hultsch et duquel il tire cette conséquence que le génie grec ne crut point avoir achevé son œuvre astronomique lorqu'il eut produit la *Syntaxe*, car il continua de s'exercer soit à corriger le système de Ptolémée, soit à lui substituer un autre système plus conforme aux doctrines péripatéticiennes et néo-platoniciennes; il en tire aussi une nouvelle preuve de ce fait que la Science islamique résulte en grande partie du butin pris sur la Science hellène de la décadence.

Bien que les principaux Ouvrages d'Hipparque soient perdus, bien que toute l'histoire de ses prédécesseurs soit composée de feuilles blanches, il y a une de ses découvertes qui traverse les siècles avec sa marque de fabrique : c'est celle de la « précession des équinoxes » qu'il fit en l'an 129 avant J.-C.; elle souleva tout de suite la fondamentale question de la durée de l'année et dès lors ce phénomène fut lié aux observations et aux calculs qui servent de base au Calendrier. Les conclusions auxquelles parvint Hipparque ne furent pas tout de suite comprises et acceptées. A ce que nous savons, le premier qui en mesura la grande valeur est Ptolémée, qui, après les avoir exposées dans son immortel Traité, les discuta et crut nécessaire d'y apporter quelques modifications; ces développements ont été le point de départ de toutes les recherches postérieures sur le même sujet. Ces recherches commencèrent avec Simplicius et furent poursuivies par bon nombre de penseurs arabes et indiens, dont M. Duhem parle tout au long dans son Chapitre XII; les plus éminents d'entre eux sont Al Battani (Albategnius), Thabit ben Kourrah et Al Zarkali. M. Duhem relie à l'analyse de leurs Ouvrages l'exposé d'autres importantes questions astronomiques traitées à la même époque; il donne enfin des renseignements complets sur l'origine, le plan et le but des célèbres *Tables alphonsines*, composées par un

groupe de Juifs fort experts en Astronomie et qui furent l'origine de tous les malheurs d'Alphonse X, roi de Castille; ce roi philosophe est, en conséquence, considéré comme le type de ces princes auxquels un goût excessif des choses de l'esprit a fait oublier l'art de régner.

Avant de revenir de sa longue pérégrination à travers le sol sacré de la Grèce et de ses courses à travers les autres pays où Aristote et Ptolémée comptent les plus ardents disciples, M. Duhem consacre un long Chapitre à un sujet qui se trouve à la frontière qui sépare l'Astronomie de la Physique, c'est-à-dire à la Théorie des Marées, phénomène mystérieux qui fut révélé aux Grecs pendant le cours de leurs longs voyages et dont ils ne tardèrent pas à apercevoir la liaison avec les mouvements des astres. Ce phénomène a été le point de départ des rêves entre les positions de la Lune et des étoiles et la destinée de l'homme, d'où naquit l'Astrologie, cette malheureuse « fille de l'Astronomie » (c'est Képler qui parle !).

Par conséquent, le Chapitre XIII s'adresse non seulement aux savants proprement dits, mais à tous ceux qui s'intéressent à suivre le mouvement de la pensée humaine, même dans ses aberrations. Les questions qui y sont traitées ([1]) sont trop éloignées du cours habituel de nos occupations pour que nous nous hasardions de discuter ou juger les points de vue choisis par l'illustre Auteur, mais, pour donner aux lecteurs une idée de l'esprit dans lequel est conçu le Chapitre dont il s'agit, nous croyons utile de transcrire les phrases sur lesquelles il finit :

([1]) Voici l'énoncé de ces questions : Les premières connaissances des Hellènes sur le phénomène des marées. L'influence de la Lune sur les marées : Eratosthène et Séleucius. L'école stoïcienne et les marées : Posidonius et ses disciplines. Les principes de l'Astrologie après Posidonius : Claude Ptolomée; les partisans de la contingence (Plutarque, Alexandre d'Aphrodisias); le fatalisme immanent (Marcus Manilius). Les astres ne sont pas des causes, mais des signes (Plotin); la matière première et le principe du mal (les Gnostiques); les astres sont causes secondes des événements sublunaires (Julius Firmicus, Proclus, la *Théologie* d'Aristote); comment l'âme humaine échappe au destin marqué par les astres; l'Astrologie et l'Alchimie; la nature de la Lune selon Plutarque; les actions physiologiques de la Lune; l'Astrologie et la Médecine. La théorie des marées selon les Arabes (Abou Masar); le *Liber de Elementis*; Averroès; Moïse Maimonide.

« Au système que Maimonide vient d'exposer aboutissent, pour ainsi dire, toutes les idées dont le présent Chapitre nous a retracé le développement. Nous y trouvons, tout d'abord, l'affirmation du principe qu'Aristote avait formulé avec tant de netteté : les diverses parties de l'Univers sont liées entre elles par un déterminisme rigoureux ; ce déterminisme soumet entièrement le monde de la génération et de la corruption au gouvernement des circulations célestes. Nous y trouvons le corollaire qu'entraîne ce principe, la définition d'une Science astrologique qui rattache chaque changement accompli ici-bas au mouvement d'un astre déterminé. Nous y voyons le rôle prépondérant que cette Astrologie attribue à la Lune; dominatrice de l'eau et des choses humides, la Lune les contraint de croître et de décroître avec elle. Les lois des marées prouvent avec évidence la réalité de cette action lunaire et, par là, de toutes les influences émanées des corps célestes. Nous entendons dire, enfin, que les changements très lents de la Terre sont liés aux mouvements presque imperceptibles des étoiles fixes, dont la révolution doit mesurer la Grande Année. A construire ce système tous les disciples de la Philosophie hellène, Péripaticiens, Stoïciens, Néo-Platoniciens, ont, tour à tour, contribué ; à ce système Abou Masar a offert l'hommage des Arabes; ce système, de Philon d'Alexandrie à Maimonide, les plus illustres rabbins l'ont adopté. Pour le condamner, comme une superstition monstrueuse et pour le jeter bas, il fallait le Christianisme. »

Quatorze siècles ou peu s'en faut se sont écoulés entre la publication de l'*Almageste* et la mort de Copernic, date qui, pour l'Astronomie, sépare le Moyen Age de l'Époque moderne; dans cette période, presque double de celle qui sépare Thalès de Ptolémée, presque quadruple de celle qui s'est écoulée depuis la mort de Copernic jusqu'à nous, aucune grande découverte astronomique n'a été faite : c'est ce qui résulte de ce qui précède. L'importance des recherches et des discussions qui eurent lieu pendant cette période consiste principalement en ce qu'elles maintinrent, pour ainsi dire, les yeux de l'Humanité tournés vers le Ciel et, en signalant les défauts du système de Ptolémée, elles préparèrent un accueil favorable à celui du grand astronome de Thorn. Par conséquent, le lecteur qui se sera hâté de parcourir les derniers

Chapitres de la première Partie de l'Ouvrage de M. Duhem, avec l'espoir secret d'assister ensuite à quelque événement de premier ordre, aura une désillusion amère en étudiant la deuxième Partie consacrée à l'*Astronomie latine au Moyen Age*. De cette Partie nous avons sous les yeux seulement le premier Chapitre, qui traite de la « Cosmologie des Pères de l'Église »; nous allons en donner un résumé fidèle après avoir remarqué que, en général, l'œil aigu du savant professeur de Bordeaux n'a su découvrir dans toute la littérature patrologique, qu'il connaît comme un théologien de profession, aucune donnée expérimentale, aucun développement mathématique représentant un progrès réel dans nos connaissances sur l'architecture ou la mécanique céleste.

L'œuvre apologétique des Pères de l'Église les conduisaient forcément à s'occuper de Physique et d'Astronomie pour trancher les conflits, réels ou apparents, qui surgissaient entre les enseignements des Livres sacrés et les enseignements de la Science profane; précisément, le désir de concilier des doctrines purement humaines avec la révélation divine fit naître bon nombre de commentaires sur la *Genèse* contenant des considérations de nature scientifique. Le premier remonte à Origène, né à Alexandrie, alors que Ptolémée vivait encore; les suivants portent les signatures de bon nombre de saints bien connus (Basile, Grégoire de Nysse, Ambroise, Jean Chrysostome, Augustin); ils ont tous un caractère plus élémentaire et moins précis que celui d'Origène. Si la concordance complète entre les prévisions des calculs et les phénomènes célestes recommandait l'Astronomie aux Pères de l'Église, cette science était, à leurs yeux, très compromise par sa mésalliance avec l'Astrologie, par laquelle elle était même dominée; suivant M. Duhem, en ruinant les cosmologies du Péripatétisme, du Stoïcisme et du Néo-Platonisme ces saints hommes firent place à la Science moderne.

Ajoutons quelques détails qui permettront à nos lecteurs de se former une idée des questions que l'historien a trouvées, tout au moins effleurées, dans la littérature patrologique. Il détermine d'abord ce qu'il y a de Platonisme dans les écrits des Pères de l'Église (particulièrement dans ceux de Saint Augustin), après avoir remarqué que le Néo-Platonisme se montrait aux yeux des Chrétiens comme la seule secte payenne avec laquelle une alliance

fût possible; de ses recherches il tire la conclusion que la désignation d'Augustisme donnée au système que le haut Moyen Age vit naître de l'union du Néo-Platonisme avec le Chritianisme ne saurait être choisi avec plus de justesse. Après un exposé de la Physique de Chalcidius (personnage si peu connu qu'on ignore même quelle était sa religion) il détermine l'attitude des Pères de l'Église par rapport à la doctrine de la *matière première*, puis leur attitude par rapport à la Grande Année, aux principes de l'Astrologie et aux théories du temps. Ce que M. Duhem nous apprend des études qu'ils firent sur la nature et la mesure du Temps présente un intérêt philosophique tout à fait hors ligne ; et nous pensons que tout le monde conviendra avec nous que rien de plus vrai n'a été écrit sur ce sujet que cette phrase de Saint Augustin : « *Quid est ergo tempus? Si nemo ex me quaerat, scio; si quaerenti explicare velim, nescio* ». Enfin M. Duhem expose les traits caractéristiques de la Physique des Pères de l'Église, ce qui lui fournit l'occasion de faire connaître la tentative entreprise par Jean Philipon (un siècle après Saint Augustin) pour établir l'accord entre les récits de la *Genèse* et la Physique traditionnelle.

Nous ne savons pas si, à ce point, se termine l'exposé de ce que l'Auteur a trouvé dans les Livres des Saints, qui puisse et doive intéresser l'histoire de la Science ; nous l'ignorons, car il ne fait aucune déclaration à ce sujet. Ce qu'il nous a appris, par des recherches patientes et minutieuses qui ressemblent plutôt à l'œuvre d'un savant bénédictin qu'à celles d'un physicien sur les rangs, n'ajoute aucune nouvelle donnée à la totalité des faits qui composent l'histoire de la Science ; de sorte que nous pensons que les historiens futurs croiront sur parole tout ce qu'il affirme et documente, sans recommencer un travail ingrat et du tout rémunératif. Toutefois, par son intrépidité dans l'étude de ces terribles volumes in-folio, il a fourni bon nombre de connaissances sur le développement général de la pensée pendant l'obscur Moyen Age; et même ceux qui, préférant d'autres points de vue, n'accueilleront pas toutes les conclusions auxquelles il s'est arrêté et feront des réserves sur beaucoup de ses appréciations, reconnaîtront qu'il a fouillé en maître dans une mine riche de noble métal. Voilà pourquoi les Volumes suivants de son monu-

mental Ouvrage sont attendus avec impatience et seront salués avec joie à leur apparition.

GINO LORIA.

JORDAN (C.). — COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. 3e édition, revue et corrigée. Tome II : *Calcul intégral* (1). 1 vol. in-8, v-705 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1913.

M. de la Vallée-Poussin, le savant professeur de l'Université de Louvain, dont il m'est agréable d'avoir à citer le nom en ce moment, avait appelé l'attention de M. Jordan sur une assertion inexacte concernant la dérivation sous le signe $\int$, émise dans la première édition du *Cours d'Analyse*. Ceci amena M. Jordan à discuter avec détail, dans la seconde édition, les propositions essentielles relatives aux intégrales définies. Cette seconde édition du Tome II, qui contenait aussi une exposition entièrement remaniée de la théorie des fonctions elliptiques, était en réalité un Ouvrage nouveau dont le *Bulletin* a rendu compte sous la plume autorisée de J. Tannery. La troisième édition diffère au contraire peu de la seconde; nous tenons cependant à profiter de l'occasion pour signaler à nouveau un Ouvrage qui peut rendre tant de services à la Science.

Le *Cours d'Analyse* est très apprécié à l'Étranger; j'en ai eu plusieurs témoignages. Il y a peu de mois encore, un jeune savant danois, déjà justement apprécié, me disait avoir appris l'Analyse dans l'Ouvrage de M. Jordan. Il ne tarissait pas d'éloges à son égard : « C'est un livre difficile à lire, disait-il, mais qui vous récompense largement de la peine qu'il vous donne. »

Le *Cours d'Analyse* est peut-être moins apprécié en France par les étudiants. Ce ne doit pas être seulement parce que nous avons plusieurs Traités d'Analyse excellents, dont aucun d'ailleurs ne saurait dispenser de l'étude du livre de M. Jordan; ce doit être surtout parce que ce livre est difficile à lire.

Au temps où j'étais un élève assez irrespectueux, nous disions

(1) La deuxième édition a été analysée dans ce *Bulletin* en 1895, p. 185.

à l'École Normale : « Lorsque M. Jordan rencontre dans un raisonnement quatre quantités jouant exactement le même rôle, il les désigne par u, λ'', λ, e_3. » Notre critique était bien un peu excessive, mais nous avions du moins senti nettement combien M. Jordan se soucie peu de certaines précautions pédagogiques vulgaires, dont l'observation nous était devenue indispensable tant nous avions été gâtés par l'enseignement secondaire.

Les professeurs de cet enseignement, comme aussi quelques membres de l'enseignement supérieur, dépensent beaucoup d'ingéniosité et souvent de talent pour épargner toute peine à leurs élèves. Ils veulent les mener sans effort jusqu'aux vérités mathématiques qui furent conquises le plus difficilement. Il est admirable qu'ils semblent y réussir si souvent; mon opinion est cependant qu'on n'y réussit jamais.

Pour être lues avec fruit, ces démonstrations si ingénieuses, si claires, si rapides, doivent être scrutées mot à mot. Tel mot indique, ou plutôt cache, une précaution ou une circonstance particulière sans laquelle la preuve tomberait, et il importe de s'en rendre compte. Tel autre mot rappelle, ou plutôt dissimule, un long raisonnement intermédiaire qu'il conviendrait de lui substituer mentalement. De sorte que, plus le raisonnement paraît facile à lire, plus il convient de se faire violence pour l'examiner attentivement. J'aime bien mieux lire les raisonnements de M. Jordan qui s'attaquent à la difficulté principale, sans jamais essayer de la masquer ou de la tourner et vous la font ainsi bien connaître; quand la difficulté est vaincue, on sait pourquoi et comment on l'a vaincue.

Ce genre de démonstration a de plus l'avantage de faire connaître à la fois les vérités mathématiques qu'on a trouvé bon d'énoncer en forme de théorèmes et leurs relations avec les faits mathématiques voisins. Quoi qu'en croient certaines personnes, les mathématiques ne sont pas une réunion de théorèmes. Ne connaître que quelques théorèmes, fussent-ils très importants, ce serait avoir des mathématiques une vue aussi fausse que celle des enfants qui se représentent les Alpes comme quatre ou cinq pains de sucre, parce qu'ils connaissent les noms de quatre ou cinq sommets.

Pour avoir une démonstration rapide et simple d'un théorème

capital, on élague tout ce qui n'est pas strictement indispensable, tout ce qui ne ferait que faire comprendre. On ressemble à celui qui essayerait d'atteindre le point culminant d'une région inconnue en s'interdisant de regarder autour de lui avant d'être arrivé au but. Si on l'y conduit, de là-haut il verra peut-être qu'il domine beaucoup de choses, il ne saura pas très bien quoi. Encore convient-il de se rappeler que des cimes très élevées on ne voit en général rien; les alpinistes n'y grimpent que pour le plaisir de l'effort à faire.

M. Jordan paraît avoir pour unique souci de bien faire connaître les faits mathématiques et leur enchaînement. S'il peut le faire en simplifiant les démonstrations classiques, il n'en manque pas l'occasion; mais il n'hésite pas non plus s'il croit préférable de recourir à un raisonnement compliqué. Il multiplie les exemples et les applications et, d'une manière générale, il ne néglige rien de ce qui peut faire comprendre. Mais jamais il ne s'ingénie pour diminuer la peine de ses lecteurs ou suppléer à leur inattention.

Les quelques modifications apportées à la troisième édition me paraissent relever des mêmes soucis pédagogiques élevés. Je note quelques compléments au calcul des intégrales abéliennes des coniques, cubiques, quartiques unicursales; quelques exemples de plus de l'emploi du calcul des résidus.

On sait combien étaient pénibles les calculs approchés d'intégrales par lesquels on établissait la continuité ou la nature de la discontinuité du potentiel, de l'attraction et de leurs dérivées au passage par les masses attirantes. Comme ces calculs n'ont aucun intérêt par eux-mêmes, M. Jordan, utilisant un Mémoire récent, substitue à ces démonstrations un mode de raisonnement plus simple basé sur un théorème d'existence des solutions des équations aux dérivées partielles de second ordre. A cette occasion, M. Jordan a écrit un Chapitre nouveau en complétant les indications sur le potentiel qui, dans l'édition précédente, ne formaient qu'un paragraphe du Chapitre sur les fonctions représentées par des intégrales définies. Ce Chapitre contient, outre ce que j'ai dit plus haut, des applications à l'attraction, à l'électricité statique et au magnétisme.

Comme préparation à l'étude du potentiel, un paragraphe nouveau sur les champs de vecteurs a été ajouté au Chapitre sur les

intégrales définies. Il contient une exposition, plus complète que celle qu'on trouve dans la deuxième édition, de la théorie des intégrales de ligne et de surface et des formules de transformations de ces intégrales, avec une application au problème de Dirichlet.

J'ai dit, au début, que ce Tome contenait des études sur l'intégrale définie. M. Jordan y utilise beaucoup la théorie des ensembles et emploie la terminologie qu'il avait proposée dès la première édition et qui a été généralement adoptée. Cependant la dénomination d'*ensemble parfait*, dans le sens où l'employait M. Jordan, n'a pas prévalu; on dit maintenant *ensemble fermé*, les mots *ensemble parfait* ayant un autre sens. Il est peut-être regrettable que M. Jordan n'ait pas adopté, dans sa troisième édition, la terminologie aujourd'hui universelle.

HENRI LEBESGUE.

TRIGNART (A.) — TABLE AUXILIAIRE D'INTÉRÊTS COMPOSÉS. Avec une Préface de A. BARRIOL. 1 vol. gr. in-8 (28^{cm}-19^{cm}) de VIII-24 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

Extrait de la Préface de M. A. Barriol.

M. Trignart m'a soumis l'idée de remplacer un nombre quelconque par la puissance d'un binome $(1+i)$. La coïncidence m'a paru curieuse et mon intérêt a été éveillé immédiatement par l'idée qui me semblait féconde. Le choix judicieux que M. Trignart avait fait de la valeur i et les quelques exemples qu'il apportait à l'appui de son idée m'ont incité à l'encourager à continuer ses travaux, et le résultat des calculs laborieux qu'il a entrepris est le petit Livre qu'il présente.

Les Tables, disposées d'une manière fort ingénieuse et très claire, rendront de réels services aux actuaires en leur permettant d'écourter, dans les calculs de précision par approximations successives, la série souvent pénible des essais. La double inégalité $(1,000)^n < N < (1,0001)^{n+1}$ permettra, grâce à la très lente croissance de l'exponentielle $(1,0001)^r$, de calculer les puissances et les racines avec une approximation plus grande qu'avec les logarithmes.

Cette Table aura évidemment sa place toute marquée parmi les Livres des actuaires, mais les ingénieurs trouveront également des avantages sérieux à son emploi.

MÉLANGES.

SUR UNE TRANSFORMATION DE CONTACT;

PAR M. GASTON DARBOUX.

La transformation de contact dont je veux dire ici quelques mots est celle qui dérive de l'équation

$$\frac{x^2}{X} + \frac{y^2}{Y} + \frac{z^2}{Z} = 1, \tag{1}$$

où x, y, z, X, Y, Z désignent les coordonnées des deux points correspondants.

Si, comme d'habitude, p et q désignent les dérivées de z considérée comme fonction de x et de y et P, Q les dérivées de Z, considérée de même comme fonction de X, Y, il faudra joindre à l'équation (1) les suivantes :

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{x}{X} + p\dfrac{z}{Z} = 0, & \dfrac{y}{Y} + q\dfrac{z}{Z} = 0; \\ \dfrac{x^2}{X^2} + P\dfrac{z^2}{Z^2} = 0, & \dfrac{y^2}{Y^2} + Q\dfrac{z^2}{Z^2} = 0. \end{array}\right. \tag{2}$$

Les équations (1) et (2) permettent d'exprimer X, Y, Z, P, Q en fonction de x, y, z, p, q et *vice versa*. On en déduit les deux systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{ll} X = -\dfrac{x}{p}(z - px - qy), & P = -p^2, \\ Y = -\dfrac{y}{q}(z - px - qy), & Q = -q^2, \\ Z = \quad z(z - px - qy), & Z - PX - QY = (z - px - qy)^2 \end{array}\right. \tag{3}$$

et

$$\left\{\begin{array}{ll} x = \dfrac{-X\sqrt{-P}}{\sqrt{Z - PX - QY}}, & p = \sqrt{-P}, \\ y = \dfrac{-Y\sqrt{-Q}}{\sqrt{Z - PX - QY}}, & q = \sqrt{-Q}, \\ z = \dfrac{Z}{\sqrt{Z - PX - QY}}, & z - px - qy = \sqrt{Z - PX - QY}, \end{array}\right. \tag{4}$$

les trois radicaux qui figurent dans ces dernières formules devant être pris partout avec le même signe.

On peut interpréter géométriquement les formules (3) de la manière suivante :

ξ, η, ζ désignant les coordonnées courantes, l'équation du plan tangent à la surface lieu du point (x, y, z) sera

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y)$$

et les équations de la normale au point de contact seront de même

$$\frac{\xi - x}{p} = \frac{\eta - y}{q} = \frac{\zeta - z}{-1} = \frac{N}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

N désignant la longueur de la normale comptée à partir du point de contact. Le signe donné au radical $\sqrt{1 + p^2 + q^2}$ fixe le signe de la normale. Si nous désignons par N_x, N_y, N_z les longueurs de cette normale, terminées respectivement aux trois plans coordonnés, nous aurons donc, en grandeur et en signe,

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} N_x &= -\frac{x}{p}\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \\ N_y &= -\frac{y}{q}\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \\ N_z &= \quad z\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \end{aligned} \right.$$

A ces expressions des trois normales adjoignons la distance δ de l'origine au plan tangent en la déterminant, en grandeur et en signe, par la formule

$$(6) \qquad \delta = \frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

où le radical est pris avec le même signe que dans les équations (5).

En rapprochant les équations ainsi obtenues, on voit immédiatement que les formules (3) peuvent être écrites

$$(7) \qquad X = N_x\delta, \qquad Y = N_y\delta, \qquad Z = N_z\delta,$$

et qu'on a de plus

$$(8) \qquad \delta = \frac{\sqrt{Z - PX - QY}}{\sqrt{1 - P - Q}}.$$

D'après cela, supposons qu'on demande de déterminer toutes les

surfaces pour lesquelles il existe une relation déterminée

$$\varphi(N_x, N_y, N_z, \delta) = 0 \tag{9}$$

entre les trois normales et δ. L'emploi des formules (5) et (6) conduirait immédiatement à une équation aux dérivées partielles à laquelle devrait satisfaire z considérée comme fonction de x, y. Nous allons voir que, pour la discussion de cette équation, il y a grand avantage à employer la transformation de contact que nous venons de définir, c'est-à-dire à substituer les variables X, Y, Z aux variables x, y, z.

La relation (9) peut, en effet, être écrite

$$\varphi\left(\frac{X}{\delta}, \frac{Y}{\delta}, \frac{Z}{\delta}, \delta\right) = 0, \tag{10}$$

et si, comme il arrive en général, δ ne disparaît pas de l'équation précédente, elle nous permet de considérer δ comme une fonction de X, Y, Z. Soit

$$\delta = \sqrt{F(X, Y, Z)} \tag{11}$$

l'expression de δ à laquelle on est ainsi conduit.

Si l'on y remplace δ par son expression déduite de la formule (8), on obtiendra l'équation aux dérivées partielles

$$Z - PX - QY = (1 - P - Q)F(X, Y, Z), \tag{12}$$

à laquelle devra satisfaire Z considérée comme fonction de X, Y.

Or, cette équation est linéaire, et son intégration dépend de celle du système d'équations différentielles

$$\frac{dX}{X - F} = \frac{dY}{Y - F} = \frac{dZ}{Z - F}. \tag{13}$$

Quand on aura trouvé les deux intégrales θ et σ de ce système, la solution générale du problème proposé sera donnée par l'équation

$$\theta = \mathcal{F}(\sigma),$$

$\mathcal{F}$ désignant une fonction arbitraire.

Mais le système (13) a une intégrale qu'on aperçoit presque immédiatement, car on déduit des équations qui le composent la combinaison suivante :

$$\frac{d(Z - X)}{Z - X} = \frac{d(Y - X)}{Y - X}$$

qui donne, C désignant une constante,

$$\frac{Z - X}{Y - X} = C. \tag{14}$$

Ainsi, tout se réduira à obtenir une nouvelle intégrale de ce système ou encore à intégrer l'équation

$$\frac{dX}{X - F} = \frac{dY}{Y - F},$$

où l'on aura remplacé Z par sa valeur tirée de l'équation (14).

L'équation précédente peut s'écrire

$$X\,dY - Y\,dX = d(Y - X)F[X, Y, X + C(Y - X)] \tag{15}$$

et la solution complète du problème se ramène à l'intégration de cette unique équation.

Supposons, par exemple, que $F(X, Y, Z)$ soit une fonction homogène de degré μ; alors l'équation (15) pourra s'écrire

$$\frac{X\,dY - Y\,dX}{(Y - X)^{2-\mu}F[X, Y, X + C(Y - X)]} = (Y - X)^{\mu-2}d(Y - X)$$

et elle donnera, par une quadrature,

$$\frac{1}{\mu - 1}(Y + X)^{\mu-1} = \int \frac{X\,dY - Y\,dX}{(Y - X)^{2-\mu}F[X, Y, X + C(Y - X)]} + C', \tag{16}$$

la quadrature qui figure dans le second membre donnant une fonction de $\frac{Y}{X}$ et de C.

Si μ était égal à 1, le premier membre devait être remplacé par $\mathrm{Log}(Y - X)$.

Il est facile d'interpréter géométriquement l'hypothèse que nous avons faite sur F. Si, dans l'équation (11), on remplace X, Y, Z par leurs valeurs, il vient

$$\delta^2 = F(N_x\delta, N_y\delta, N_z\delta)$$

ce qui donne, en tenant compte de l'hypothèse faite sur F,

$$\delta^{2-\mu} = F(N_x, N_y, N_z);$$

δ sera donc une fonction homogène de N_x, N_y, N_z de l'ordre $\frac{\mu}{2 - \mu}$.

En d'autres termes, on pourra résoudre le problème par une

quadrature toutes les fois que δ sera une fonction homogène des trois normales N_x, N_y, N_z.

Dans la discussion qui précède, nous avons exclu le cas où δ disparaîtrait de l'équation (10), ce qui arrivera toutes les fois que la relation entre δ et les trois normales sera de la forme

$$\varphi(\delta N_x, \delta N_y, \delta N_z) = 0.$$

Mais cette hypothèse est très aisée à traiter directement. On sait, en effet, d'après la théorie générale des transformations de contact, que, si l'on a une relation

$$\varphi(X, Y, Z) = 0,$$

entre X, Y, Z, il faut lui adjoindre une autre relation *arbitraire* entre X, Y, Z,

$$\varphi_1(X, Y, Z) = 0,$$

qui permettra de considérer X, Y, Z comme fonctions d'une seule variable α. Si l'on prend alors, en faisant varier α, l'enveloppe de la quadrique

$$\frac{x^2}{X} + \frac{y^2}{Y} + \frac{z^2}{Z} = 1,$$

on aura, sans quadrature, la solution générale du problème proposé. Une solution plus particulière s'obtiendrait en attribuant à X, Y, Z des valeurs constantes.

Supposons, par exemple, qu'on demande que les trois normales soient liées par la relation

$$aN_x + bN_y + cN_z = 0, \tag{17}$$

où a, b, c désignent des constantes quelconques. On aura alors

$$aX + bY + cZ = 0, \tag{18}$$

et l'on pourra poser

$$cZ = \varphi(\alpha), \qquad aX = -\alpha\varphi(\alpha), \qquad bY = (\alpha - 1)\varphi(\alpha),$$

$\varphi(\alpha)$ désignant une fonction arbitraire de α. En portant ces valeurs de X, Y, Z dans l'équation (1), on reconnaîtra que les surfaces cherchées sont les enveloppes des quadriques

$$\frac{ax^2}{\alpha} - \frac{by^2}{1-\alpha} + cz^2 = \varphi(\alpha),$$

lorsqu'on fera varier α.

On aurait encore une autre solution en prenant pour X, Y, Z des valeurs constantes, liées par la relation (18).

Nous terminerons en disant quelques mots du cas particulier où la relation donnée entre δ et les normales ne contiendrait que ces normales. Soit

$$\varphi(N_x, N_y, N_z) = 0 \tag{19}$$

une telle relation. Si l'on y remplace N_x, N_y, N_z par leurs valeurs, elle devient

$$\varphi\left(\frac{X}{\delta}, \frac{Y}{\delta}, \frac{Z}{\delta}\right) = 0$$

et donne, par conséquent, pour δ une fonction homogène du premier degré de X, Y, Z, à moins que la fonction φ ne soit homogène, auquel cas on aurait

$$\varphi(X, Y, Z) = 0$$

et nous rentrerions dans une hypothèse déjà étudiée.

Supposons donc que δ soit une fonction homogène du premier degré; alors la fonction F qui figure dans l'équation (12) sera homogène et du second degré et l'on pourra appliquer la formule (16) en y faisant $\mu = 2$, ce qui donnera

$$Y - X = \int \frac{X\,dY - Y\,dX}{F[X, Y, X + C(Y - X)]} + C'. \tag{20}$$

Proposons-nous, par exemple, de déterminer toutes les surfaces pour lesquelles il existe une relation linéaire

$$aN_x + bN_y + cN_z = 1 \tag{21}$$

entre les trois normales. On sera conduit à l'intégrale générale

$$\frac{1}{aX + bY + cZ} - a - b - c = \frac{1}{Y - X}\,\varphi\left(\frac{Z - X}{Y - X}\right). \tag{22}$$

Si la somme $a + b + c$ est nulle, cette intégrale devient illusoire et doit être remplacée par la suivante :

$$aX + bY + cZ + \frac{X}{aX + bY + cZ} = \varphi\left(\frac{Z - X}{Y - X}\right).$$

Dans ce cas spécial, l'équation (21) équivaut à une relation linéaire entre les deux segments que les trois plans coordonnés interceptent sur la normale à la surface lieu du point (x, y, z).

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SMITH (David-Eugène) and MIKAMI (Yoshio). — A History of Japanese Mathematics. 1 vol. gr. in-8, VII-288 pages. Chicago; the open Court publishing Company, 1914.

Cet Ouvrage traite de l'histoire du *wasan* (¹) ou mathématique du vieux Japon. La révolution de 1868 a porté un coup mortel au *wasan* et les Auteurs donnent l'impression d'avoir voulu déposer une fleur sur une tombe. Le *wasan* n'a plus qu'un intérêt historique et sociologique. Il permet d'imaginer ce qu'aurait pu être la Mathématique chez un peuple aussi différent des peuples occidentaux que l'est le peuple japonais. Le *wasan* a donc la valeur d'une expérience précieuse et son étude peut sans doute conduire à des conclusions philosophiques intéressantes. Comme idées générales sur les mathématiques japonaises, on peut retenir, pour l'Arithmétique, l'usage d'un boulier, l'étude des fractions continues, des figures magiques (carrés et cercles) et de quelques problèmes d'analyse indéterminée. En Algèbre, les Japonais ont su résoudre, par des méthodes d'approximation, des équations algébriques de degrés assez élevés et même des équations transcendantes. Ils inventèrent les déterminants, sans les appliquer, d'ailleurs, aux équations linéaires. En Géométrie, ils cherchèrent hors des voies d'Euclide. Leur géométrie fut essentiellement métrique, algébrique. Leurs problèmes portaient principalement sur des figures composées de droites et de cercles tangents, du type de Malfatti, ou bien sur des évaluations d'aires ou de volumes à l'aide de développements en séries ou d'intégrations déguisées. C'est donc sous la forme du calcul de π que le problème de la quadrature du cercle se posa à eux. Ils s'y attachèrent avec assiduité et réussirent à obtenir un nombre de décimales tout à fait imposant. La Géométrie et les théories d'Analyse forment chez eux un tout indissoluble. « Il n'y a de science que du général », a-t-on dit. Les Japonais

(¹) *Wa* = Japon et *san* = mathématique.

réussirent cependant à créer une science toute de considérations particulières, d'ailleurs souvent fort ingénieuses. Ils n'eurent pas, semble-t-il, un souci excessif de la rigueur, et leur imagination mathématique ne s'éleva jamais jusqu'à créer de grandes théories ou jusqu'à se préoccuper des principes métaphysiques de leur science. Ce furent des artistes délicats, patients et raffinés dont l'activité ne s'étendit guère hors du domaine formel des calculs analytiques.

L'Ouvrage de MM. Smith et Mikami est très attachant, aisé à lire et illustré de nombreuses et curieuses figures.

Le développement du *wasan* comprend six périodes auxquelles correspondent à peu près les divisions de l'Ouvrage :

1° Période antérieure à 552 : influence mal précisée des mathématiques chinoises;

2° De 552 à 1600 : influence des mathématiques chinoises ou coréennes, originalité japonaise à peu près nulle;

3° De 1600 à 1675 : période de renaissance, développement du *wasan* dans sa pureté;

4° De 1675 à 1775 : influence de Seki, développement notable du *wasan* avec de vagues infiltrations de mathématiques occidentales;

5° De 1775 à 1868 : suite de l'évolution du *wasan* qui commence à décliner sous l'influence de plus en plus profonde des idées étrangères;

6° De 1868 à nos jours : déclin du *wasan*, avènement du *yosan* (mathématique occidentale).

Le Chapitre I expose ce qu'on sait de la période archaïque, c'est-à-dire à peu près rien : on a tout au plus quelques indications sur le calendrier et le système de numération.

Le Chapitre II correspond à la deuxième période. La date de 552 est la date traditionnelle de l'introduction du bouddhisme au Japon. Toute activité intellectuelle avait sa source en Chine. A ce propos, les Auteurs donnent la liste des ouvrages chinois admis à une université japonaise fondée en 701. J'y relève les principales parties d'un Traité (1) antérieur de peut-être 20 à 30 siècles à l'ère chré-

(1) Le *Chiu-chang Suan-shu*.

tienne et qui résume à peu près le programme de l'enseignement : les opérations de l'arithmétique élémentaire avec l'extraction des racines carrés et cubiques, la règle de trois, la règle des alliages, la règle dite *de fausse position*, les fractions, les nombres négatifs, la résolution des équations linéaires, la résolution d'équations du second degré par une règle équivalente à la formule classique, le théorème de Pythagore, l'évaluation de l'étendue de diverses figures, triangle, quadrilatère, cercle, segment, secteur, anneau, puis pyramide, prisme, cône circulaire, tronc de cône, tétraèdre et divers problèmes d'arpentage. L'auteur prend $\pi = 3$. On voit la haute antiquité de tous ces sujets. Mais après une grande prospérité intellectuelle au début du VIIIe siècle, le Japon retomba dans une profonde barbarie. La Science dégénéra en Astrologie, en recherches d'énigmes. Toute science fut dédaignée à tel point qu'ignorer la valeur des monnaies était un signe de distinction. Seuls les gens de basse extraction savaient compter.

Dans les Chapitres III et IV, les Auteurs interrompent leur exposition historique pour décrire deux appareils destinés à exécuter les calculs numériques. A défaut de moyens graphiques, pratiques et économiques, des appareils mécaniques permettant de calculer se sont imposés aux peuples anciens : dans les premiers siècles de de la civilisation chinoise, le métal et la pierre étaient les seuls moyens de transmission du savoir écrit. Le *soroban* japonais est un perfectionnement du *swan p'an* ou boulier chinois. Le *sangi* provient également de la Chine : il est constitué par un jeu de bâtonnets aplatis de 5^cm de long. En disposant tous ces bâtonnets dans des casiers formant une sorte de damier, on peut écrire les nombres dans le système décimal. Les signes + et — n'existent pas : on écrit les nombres positifs avec des bâtonnets rouges et les nombres négatifs avec des bâtonnets noirs. Le *sangi* et le *soroban* semblent avoir été introduits au Japon vers le XVe siècle, par l'intermédiaire de la Corée. Le *soroban* était surtout employé par le peuple, dans les calculs commerciaux, et le *sangi* par les *Samuraïs*, pour les spéculations mathématiques. Mais il est à remarquer que l'invasion des idées occidentales au Japon n'a pas atteint l'usage du *soroban* ni celui du *sangi*. Les chiffres écrits dérivent du *sangi* avec suppression des casiers. Les nombres négatifs, dans ce système, sont barrés obliquement.

Le Chapitre V aborde la troisième période (1600 à 1675). La pratique du *soroban* se perfectionna (extraction des racines carrées et cubiques). Le premier Traité de mathématiques japonaises fut imprimé en 1627. On y donne $\pi = 3,16$. On calcula l'aire du cercle, les aires et les volumes de la sphère et du cône. Les polygones réguliers furent étudiés jusqu'au décagone. Des recherches furent faites sur les figures magiques (inventées par les Chinois). On trouve dans un Traité du temps la valeur $\pi^2 r^2$ pour aire de la sphère. Cette expression était obtenue en assimilant la surface de la sphère à la peau d'une orange qu'on décomposait ensuite en triangles. L'auteur rectifia son erreur en évaluant le volume d'une couche sphérique de diamètres 10 et 10,0002 et en divisant le volume par 0,0001. Il trouve pour la surface sphérique

$$314,160000041888$$

et il en déduit

$$s = 4\pi r^2.$$

C'est, comme on voit, un calcul un peu empirique. π fut obtenu avec huit chiffres exacts en calculant le périmètre du polygone de 2^{15} côtés (1683), mais l'auteur ne s'en aperçut pas et conserva la valeur admise à l'époque, 3,14. Le volume de la sphère fut calculé en le décomposant en 100 segments assimilés à des cylindres : ainsi les Japonais étaient sur la voie des méthodes occidentales, ce qui est tout à fait intéressant.

Le Chapitre VI étudie le premier grand mathématicien japonais : Seki Shinsuke Kōwa (1642-1708). Seki donna un vigoureux élan aux mathématiciens japonais, surtout par son enseignement et par sa méthode, le *yendan jutsu*, c'est-à-dire « la manière d'exposer ». Avant lui, en effet, on se contentait souvent de donner des résultats, sans trop dire comment on les obtenait. Seki se fit au contraire une grande renommée comme éducateur. Ce n'est pas que son école fût ouverte à tout venant : ses méthodes étaient tellement secrètes que ceux qui n'appartenaient pas à son école ne les connurent définitivement qu'en 1769. L'école de Seki était divisée en cinq classes et les deux dernières étaient la classe de « l'instruction spéciale » et la classe de la « révélation après serment », qui ne pouvait être ouverte qu'à trois personnes, après un serment solennel de discrétion. On peut donc croire qu'actuelle-

ment encore la nature exacte des travaux de Seki reste assez mystérieuse.

La méthode de Seki est le *tenzan*. *Ten* signifie en chinois *restaurer*, et *zan*, *réduire*. Les Auteurs comparent ces mots à ceux de Mohammed-ben-Musa, *al-jebr w'al-muqabala*, qui ont le même sens. Il est assez curieux que l'Algèbre ait été dénommée de même en Occident et en Orient. Seki traite ainsi de la décomposition en facteurs, de la recherche du plus petit multiple commun, de la sommation des séries infinies, du calcul de la somme des puissances des n premiers nombres, de la théorie des différences, du développement en série des racines d'une équation du second degré, du calcul des côtés des polygones réguliers, de l'étude des maxima et des minima, des carrés magiques et des cercles magiques, etc. Il évalue des volumes et des aires. Il est bien digne de remarque que Seki ait imaginé la théorie des déterminants dès 1683 et lui ait donné un développement assez important. Rappelons que l'idée de déterminant remonte, en Europe, à Leibniz (1693). La priorité appartient donc incontestablement à Seki. La manière dont les déterminants se sont introduits est assez curieuse pour être exposée. Il faut d'abord savoir comment les Japonais disposaient une équation algébrique :

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$$

s'écrivait

$$1 \quad -3 \quad 4 \quad -2,$$

les nombres étant disposés en colonne verticale. A chaque ligne correspondait donc une puissance de x. Le signe $= 0$ était supprimé, le second membre de toute équation japonaise étant zéro. La question s'était posée d'éliminer les diverses puissances de x entre n équations du $n^{\text{ième}}$ degré. Le problème se ramène aisément à éliminer les puissances de x entre n équations de degré $n - 1$. On obtenait alors un tableau qui n'est autre qu'un déterminant, et sur ce tableau, Seki faisait des opérations revenant à l'interversion des lignes et des colonnes. Il savait également développer le déterminant, donnait des règles pour trouver les termes précédés du signe $+$, termes dits *pris vivants*, et les termes précédés du signe $-$, dits *mis à mort*. Il connaissait le nombre de termes du

développement. Un autre Traité sur les déterminants fut publié en 1690, puis, rien moins qu'une vingtaine d'Ouvrages, mais, chose étrange, les Japonais n'appliquèrent jamais cette théorie aux équations linéaires et, plus tard, ils l'oublièrent même complètement.

Cette découverte des déterminants, à coup sûr antérieurement à Leibniz, conduit à la question de savoir quelles furent les influences possibles de l'Occident sur Seki et ses contemporains : le Chapitre VII approfondit ce sujet délicat et difficile. La conclusion est qu'il est vraisemblable que Seki a eu quelque connaissance des tendances mathématiques de l'Occident et de la nature des résultats obtenus.

Le Chapitre VIII discute la question du *yenri* ou *principe du cercle*. Le principe du cercle est assez mystérieux. Ce serait une analyse que MM. Smith et Mikami ne reproduisent pas et qui conduirait au développement de $[\arccos(1-x)]^2$ en série de puissances. Sur la valeur de ce principe, les Auteurs disent que « c'est seulement une méthode intéressante, ingénieuse, un peu obscure d'obtenir une formule capable d'être appliquée de diverses manières, mais qui ne peut en aucune façon être comparée à l'analyse infinitésimale... ». C'est qu'en effet, quand Takebe Hikojiro Kenkō, samuraï (1664-1739) communiqua le *yenri* à ses élèves, en 1722, « ceux-ci, dit un de ses disciples, s'écrièrent avec enthousiasme : « Est-ce humain, ou divin? Voilà qui chasse au loin » les nuages et les ténèbres et qui ne laisse que le ciel bleu » et, en vérité, on peut dire qu'il (Takebe) fut l'homme unique en un millier d'années, la lumière éclatante du pays du Soleil levant ! » « Le *yenri*, dit un autre, est une méthode parfaite... éternelle et invariable..., c'est une découverte qu'il n'est que juste de regarder comme divine....» Le *yenri*, attribué parfois à Seki, paraît dû à Takebe. Mais le développement est-il même de Takebe? Il semble que non. Ce développement serait parvenu à Takebe par l'intermédiaire de Pierre Jartoux, missionnaire jésuite résidant à Péking de 1700 à 1720. Jartoux était en correspondance avec Leibniz, et l'on sait par tradition qu'il communiqua aux Chinois six ou neuf séries dont trois parvinrent au Japon. Parmi ces séries aurait été celle de Takebe, et le *yenri* ne serait que la méthode ingénieuse de Takebe pour vérifier après coup l'exactitude du développe-

menten série. En tous cas, à partir de cette époque, les Japonais excellèrent à manipuler les séries.

Le Chapitre IX étudie le XVIIIe siècle. On y traita de problèmes d'analyse indéterminée. On vit apparaître en 1736 le développement d'un radical en fraction continue. On poursuivit l'étude des carrés magiques. Les recherches géométriques furent continuées avec patience. On s'intéressa à une multitude de problèmes de cercles tangents, le problème de Malfatti et d'autres analogues, mais toujours par des méthodes algébriques. Les problèmes de rectifications d'arcs et de quadratures ne sont pas abandonnés. A ce sujet, on doit remarquer que le problème de la quadrature du cercle, au sens occidental du mot, ne s'est pas présenté. Que les Japonais aient évité cet abîme où se perdit tant d'ingéniosité et de subtilité, ils le doivent certainement à leur géométrie ; leurs problèmes se résolvaient en nombres et non en constructions. Dès lors, pour eux, le problème de la quadrature du cercle n'était pas différent, en nature, de celui de la recherche des racines d'une équation du second degré et ils résolurent ces deux problèmes par des méthodes d'approximation. Ils réussirent d'ailleurs, dans cet ordre d'idées, à calculer π avec 50 décimales et les puissances de π, de π^2 à π^{22} avec les 32 premiers chiffres.

Le Chapitre X est consacré à l'étude de l'œuvre d'un grand mathématicien : Ajima Manzō Chokuyen, samuraï (1739-1798). Je note en passant quelques-uns de ses sujets d'étude : la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = y^2,$$

des problèmes du type de Malfatti, des recherches sur les fractions continues, la spirale d'Archimède, sa quadrature et sa rectification au moyen de séries. Il améliore le *yenri* qui tend à se rapprocher du calcul intégral. Un autre mathématicien, Aïda, représente la liberté de pensée, le travail indépendant. Il entre en lutte avec l'école de Seki, dont l'enseignement ésotérique prétendait monopoliser étroitement la Science à son profit. Aïda étudia les équations indéterminées telles que

$$x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + \ldots + 10x_{10}^2 = y^2,$$
$$x_1^2 + 2^2x_2^2 + 3^2x_3^2 + \ldots + 10^2x_{10}^2 = y^2,$$

les développements en série de $(a+b)^{\frac{1}{n}}$ et de $\sin(m \operatorname{arc}\sin x)$, etc.

Le Chapitre XI traite du début du XIXe siècle. Sakabe (1759-1824), samuraï, élève d'Ajima, publia un Traité en 15 Livres (1815). Il donne des théories sur la nature des racines des équations algébriques, mais sans parler des racines imaginaires que le *wasan* a toujours ignorées. Il donne la solution de divers problèmes du type de Malfatti. Il est remarquable que les premiers essais de géométrie non algébrique ne soient pas antérieurs à 1840. On étudia encore à cette époque diverses méthodes d'approximation des racines des équations algébriques et des procédés de calcul graphique. Je note enfin que les derniers secrets de l'école de Seki furent révélés en 1830.

Le Chapitre XII étudie l'œuvre de Wada Yenzō Nei, samuraï (1787-1840). Il améliore les méthodes de Seki, fait des intégrations et établit même une Table d'intégrales. Il donne plus de cent développements en série pour π. Il trouve, également par un développement en série, le périmètre de l'ellipse et évalue divers volumes. Wada donnait un enseignement secret : les meilleurs mathématiciens de l'époque allaient le consulter mystérieusement, reconnaissant son talent de maître et d'inventeur. Tous ses manuscrits furent détruits dans un incendie, ce fléau si fréquent au Japon. On peut dire que ce fut le dernier grand mathématicien du *wasan*.

Le Chapitre XIII étudie la décadence du *wasan*. Un problème très à la mode chez les contemporains de Wada est l'étude des figures formées d'ellipses ou de cercles qu'on peut inscrire dans un éventail circulaire ou dans un éventail ayant la forme d'un secteur annulaire de cercle. On résout aussi à cette époque en nombres entiers l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = n^3.$$

On calcule l'aire des fenêtres de Viviani et d'autres du même genre, l'aire de la section plane d'un tore, etc.

L'ère du *wasan* semble terminée avec Hajiwara Teisuke (1828-1909).

Le Chapitre XIV et dernier étudie comment se fit l'infiltration des mathématiques occidentales. Elles s'introduisirent indirectement, d'abord par des ouvrages chinois, œuvres des missionnaires

jésuites, ou directement, par les commerçants hollandais de Nagasaki. C'est en 1542 que le Japon prit en premier lieu contact avec l'Occident, mais, en fait, ce n'est guère qu'à partir du XVIIIe siècle que l'influence occidentale devint effective. Les mathématiques occidentales s'introduisirent très difficilement et n'ont guère influé sur l'évolution générale du *wasan*. C'est ainsi qu'Euclide, traduit en chinois en 1607, ne fut bien connu au Japon qu'au milieu du XVIIIe siècle, mais n'eut, semble-t-il, que peu d'influence. Une trigonométrie et une astronomie, inspirées des idées européennes, apparaissent en 1696. L'arithmétique européenne fut introduite au XVIIIe siècle, sans d'ailleurs faire disparaître le *soroban*. En 1803 paraît un Ouvrage inspiré des « Principes » de Newton, avec l'exposé d'une hypothèse cosmogonique assez analogue à celle de Laplace. Des traductions de Lalande furent en grand honneur vers 1820. On voit apparaître, en Chine, une Table de logarithmes en 1713, mais les logarithmes ne furent pas connus au Japon avant les deux dernières années du XVIIIe siècle, et la première Table fut un Ouvrage de Sakabe (1810-1815) qui ne donnait que les logarithmes des nombres de 1 à 130. La théorie des logarithmes ne fut comprise que très tard au Japon, et ne fut pas exposée avant 1854. La cycloïde fut l'objet de quelques travaux, mais à la suite d'infiltrations européennes. En tout cas, si les sujets d'études étaient européens, les méthodes étaient japonaises.

Le calcul différentiel et intégral fut introduit en 1859 par une traduction chinoise d'un Ouvrage américain de Loomis. L'ellipse fut étudiée avec zèle dès le XVIIIe siècle, mais l'hyperbole et la parabole semblent être restées inaperçues de la vieille école. En définitive, jusqu'aux environs de la révolution de 1868, les mathématiciens japonais ne furent qu'effleurés par les idées qui préoccupaient leurs confrères occidentaux. Les méthodes européennes, mal connues ou inconnues, étaient d'ailleurs tenues en singulier mépris : « Quoique les Européens excellent en tous sujets relatifs à l'Astronomie et au Calendrier, dit un anonyme, néanmoins, leurs théories mathématiques sont inférieures à celles que nous avons développées avec tant d'exactitude... », et un autre : « Le nombre est dans les cieux et sur la terre, mais l'art de s'en servir est humain, quelquefois précis, quelquefois imprécis.

La minutieuse perfection de notre œuvre mathématique surpasse de beaucoup ce qu'on trouve en Occident, parce que notre pouvoir est un héritage divin, exalté par le génie audacieux et noble qui s'érige au-dessus des autres nations de l'Univers. »

Cependant, concluent les Auteurs, « les mathématiques du Japon étaient analogues à leur art, exquises plutôt que grandes. Ils ne développèrent jamais de grandes théories comme Newton, Leibniz, Euler, Lagrange ou Gauss. On ne trouve pas de travail de ce genre au Japon et l'on n'a pas la moindre raison de croire qu'on en puisse trouver. Mais l'Europe avait quelques milliers d'années de culture mathématique derrière elle, quand Newton et Leibniz élaborèrent le Calcul infinitésimal, et, pendant ces années, les travailleurs de chaque pays inspiraient ceux des autres. Le Japon, au contraire, n'avait eu l'occasion de cultiver les mathématiques que depuis un siècle à peine quand Seki entra dans la lice. De ce point de vue, le Japon créa une œuvre remarquable; mais du point de vue de la découverte mathématique, cette œuvre est, en tous points, inférieure à celle de l'Occident. Mais si, néanmoins, nous en apprécions l'exécution, elle est comme une boîte de vraie laque ancienne, non de celle qu'on fabrique aujourd'hui pour le commerce. L'exécution fut exquise et d'un genre tout à fait inconnu en Occident... Que sera le résultat de l'introduction des nouvelles mathématiques au Japon?... Si elles doivent conduire à l'application du génie spécial de l'ancienne école, le génie des soins infinis, à de vastes théories, alors le Monde verra peut-être des résultats qui feront époque. Mais si, au contraire, elles doivent conduire au mépris du passé, à l'abandon de ce qui fait le *wasan* digne d'étude, alors nous ne voyons pas ce que réserve l'avenir. C'est dans l'espoir que l'Occident appréciera le génie spécial d'hommes tels que Seki, Takebe, Ajima et Wada, et sera sympathique à l'application de ce génie aux nouvelles mathématiques que cet Ouvrage est écrit ».

Jacques Chapelon.

CHAUMONT [1] (J. Louis). — Recherches sur le phénomène électro-optique de Kerr et sur les méthodes servant a l'étude de la lumière polarisée elliptiquement. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences physiques*, soutenue le 18 juin 1914, sous la présidence de M. Bouty. 1 vol. gr. in-8, v-213 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

La valeur absolue de la constante de Kerr pour le sulfure de carbone est particulièrement importante, ce liquide ayant été pris souvent comme corps de comparaison dans des mesures, en valeur relative, des biréfringences électriques des divers liquides. Or, cette constante était très mal connue : les valeurs indiquées ne s'accordaient même pas à 10 pour 100 près. A quoi étaient dus ces désaccords? Fallait-il incriminer le manque de précision des diverses mesures nécessaires, notamment de la détermination du champ électrique qui n'intervient pas dans les mesures relatives? Ou bien les impuretés présentes dans le liquide jouaient-elles, comme certains physiciens l'ont pensé, un rôle important? Telles sont les questions que s'est posées M. Chaumont et qui l'ont conduit à étudier méthodiquement les diverses mesures indépendantes nécessaires pour obtenir une valeur précise de la constante de Kerr.

La mesure optique de la biréfringence semblait *a priori* devoir être facile : on a aujourd'hui des appareils à pénombre très sensibles; M. Chaumont comptait les employer. Mais comme il avait cherché naturellement à accroître la grandeur de la biréfringence à mesurer, il a rencontré dans l'application de ces méthodes des difficultés qui ne s'étaient pas présentées aux physiciens qui n'avaient eu à mesurer que des ellipses très aplaties. M. Chaumont ne s'est pas contenté de les lever : il a été conduit à faire une étude d'ensemble très approfondie de la mesure des vibrations elliptiques qui constitue une première Partie, très importante à elle seule, de son travail.

M. Chaumont considère le cas général où l'on ne sait rien *a priori* sur la vibration elliptique à étudier et où il y a deux inconnues à déterminer (par exemple, le rapport des axes de l'ellipse et l'orientation du grand axe). Il classe méthodiquement les divers appareils permettant de déterminer soit l'une seulement de ces deux inconnues, soit toutes deux, et en fait une étude critique.

---

[1] Blessé mortellement au Champ d'Honneur, à Meaux, le 8 septembre 1914.

Cette étude est beaucoup plus complète que celle publiée par Tukerman; elle est cependant plus facile à suivre, parce que, au lieu de faire de longs calculs, M. Chaumont fait un usage constant de la représentation géométrique des vibrations elliptiques donnée par H. Poincaré. Il a été ainsi conduit à réaliser un appareil nouveau pour l'étude de ces vibrations dans le cas général. Cet appareil (comprenant un analyseur à quatre plages et un compensateur quart d'onde) détermine la vibration à étudier avec la même précision quelle que soit cette vibration; il réalise en outre dans les cas les plus simples (lorsque le quart d'onde est exact) la condition de l'indépendance des observations: c'est-à-dire que deux opérations successives et deux lectures sur des cercles gradués donnent immédiatement, sans tâtonnements, le rapport des axes de l'ellipse et l'orientation de son grand axe.

Dans la construction de son appareil, M. Chaumont a mis à profit deux études originales faites au cours de son travail : 1° l'examen des conditions géométriques à imposer au faisceau lumineux pour utiliser le mieux possible la sensibilité de l'œil; 2° l'étude des effets pertubateurs des réflexions multiples sur les faces des lames cristallines employées. M. Chaumont indique le moyen d'éviter complètement la cause d'erreur provenant de ces réflexions et de rendre en même temps les pointés plus précis (emploi d'un mica immergé dans un liquide contenu dans une petite cuve prismatique à vision directe), puis il décrit un procédé commode et sûr pour déterminer avec précision la radiation pour laquelle une lame de mica est exactement quart d'onde. Il est certain que les procédés d'étude et de construction des lames quart d'onde trouvés par M. Chaumont réalisent un grand progrès dans l'emploi de ces appareils dont les physiciens se servent si fréquemment.

M. Chaumont étant ainsi en possession d'une méthode optique satisfaisant complètement aux conditions exigées a passé ensuite aux recherches électro-optiques proprement dites décrites dans la deuxième Partie de sa Thèse. Dans l'expression de la constante de Kerr le champ électrique intervient par son carré: il faut le déterminer avec grand soin. L'Auteur mesure les volts à l'aide d'une méthode potentiométrique de précision; il a construit lui-même, dans ce but, une batterie de 5000 accumulateurs et

plusieurs mégohms. Le condensateur, de construction très soignée, a été mesuré aussi avec précision. L'étude théorique de la « correction des bouts » a été complètement reprise : l'Auteur a réussi à calculer le champ en chaque point du trajet du rayon dans la cuve de Kerr en tenant compte de l'épaisseur des plateaux et donnant l'expression correcte de la longueur corrigée : ce calcul pourra rendre service dans des recherches de nature différente.

La comparaison des divers échantillons de sulfure de carbone a montré que la constante de Kerr n'est pas affectée d'une façon sensible par les impuretés qui résistent à une simple distillation. M. Chaumont a fait cette comparaison par une méthode de compensation (avec deux condensateurs à angle droit dont on fait varier, non pas les dimensions, mais les différences de potentiel) : cette méthode, qui pourrait convenir très bien à des mesures relatives sur des liquides variés, permet d'obtenir, du même coup, une vérification très précise de la loi de Kerr pour le sulfure de carbone. Enfin la valeur même de la constante de Kerr pour ce liquide est déterminée à $\frac{1}{500}$ près environ. On mesure par là les progrès réalisés : le phénomène de Kerr, grâce à la Thèse de M. Chaumont, peut se prêter à des recherches vraiment précises. Mais, on l'a vu, ce travail important a un intérêt qui dépasse celui de la question particulière que l'Auteur s'était posée : il apporte, sur nombre de sujets d'intérêt général, des méthodes d'étude originales ou des renseignements précieux. Qu'il s'agisse de questions théoriques (polarimétrie en général, champ d'un condensateur, etc.) ou d'appareils (mesure des vibrations elliptiques, réalisation d'un quart d'onde exact, mesure des potentiels et des champs), cette Thèse sera consultée avec fruit.

Malheureusement, ceux qui ouvriront désormais ce Livre ne le feront pas sans émotion : la mort aveugle est venue faucher toutes les espérances que ce beau Travail faisait naître. M. Chaumont ne pourra plus, hélas, exécuter lui-même les autres recherches originales très importantes qu'il projetait et qu'il aurait certainement, avec son ardeur au travail, sa remarquable variété d'aptitudes et aussi toute l'expérience qu'il avait acquise, poursuivies avec le plus vif succès.

La R.

ARRHENIUS (SVANTE). — CONFÉRENCES SUR QUELQUES THÈMES CHOISIS DE LA CHIMIE PHYSIQUE PURE ET APPLIQUÉE, faites à l'Université de Paris du 6 au 13 mars 1911. 1 vol. in-8, IV-113 pages. Paris, A. Hermann et fils, 1912.

Ce petit Livre renferme cinq Conférences dans lesquelles le célèbre Directeur de l'Institut Nobel expose brièvement l'état actuel de quelques problèmes de la physico-chimie.

I. *La théorie moléculaire.* — L'Auteur développe particulièrement une phase de la lutte entre la théorie cinétique et la méthode thermodynamique. La vieille conception moléculaire des philosophes grecs est devenue une réalité à la suite des remarquables travaux de MM. Einstein, Smoluchowski et surtout J. Perrin sur les petites particules animées du mouvement brownien. L'excellente valeur du nombre d'Avogadro $N = 65 \times 10^{22}$ qui en est résultée a confirmé et précisé les déterminations faites par la méthode électrique sur la limite de la charge électrique.

Au sujet de cette dernière, S. Arrhenius analyse succinctement les travaux de Millikan, Ehrenhaft et Przibram, d'où il paraît résulter que la charge électrique $e = 4,5 \times 10^{-10}$ U. S. représente la charge *moyenne* des particules et des ions, la charge individuelle de chacun d'eux variant entre des limites assez étendues. La constance de cette charge ne serait donc qu'une de ces vérités statistiques dont on fait aujourd'hui un assez fréquent usage.

Ces travaux, par la belle concordance de leurs résultats, ont fait triompher la théorie cinétique des attaques de l'école énergétique.

II. *Les suspensions et les phénomènes d'adsorption.* — Cette Conférence est l'exposé de quelques recherches expérimentales sur ces deux questions.

Les suspensions ou émulsions, en particulier celles du soufre soluble, du sulfure d'arsenic et de l'hydrate ferrique, ont été étudiées par Svedberg et Odén, par Arrhenius et par Freundlich. Ces savants en ont mesuré les solubilités et les chaleurs de dissolution; ils ont particulièrement observé l'influence précipitante des sels et constaté que, dans le cas des suspensions positives, c'est l'anion qui a l'action prépondérante, tandis que c'est le

cathion qui joue le rôle important dans les solutions négatives. Arrhenius distingue entre les colloïdes et les suspensions, le premier terme étant réservé aux corps d'origine organique et le second aux composés minéraux.

Le phénomène de l'adsorption vérifie, dans un grand nombre de cas, la loi exprimée par la formule

$$a = \mathrm{K}\, c^n,$$

dans laquelle a désigne la quantité du corps adsorbé, c la concentration du même corps dans le milieu ambiant, K et n des constantes. Cependant, cette formule ne doit être employée qu'avec prudence, M. Schmidt ayant constaté que les quantités K et n ne sont pas toujours indépendantes de la température et de la pression et que, généralement, la quantité adsorbée tend, non pas vers l'infini, mais vers un maximum quand la concentration augmente.

III. *L'énergie libre.* — Arrhenius s'efforce de démontrer la généralité du concept d'Énergie libre, expression nouvelle de la notion d'affinité chimique, plus particulièrement dans les cas d'équilibre où le principe du travail maximum ne s'applique pas. Les formules

$$\mathrm{A} = \mathrm{RT} \log_e \mathrm{K} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{U} = \mathrm{A} - \mathrm{T}\frac{d\mathrm{A}}{d\mathrm{T}},$$

qui représentent la variation d'énergie libre d'une part, la chaleur absorbée dans une réaction chimique d'autre part, sont appliquées successivement aux phénomènes de vaporisation, de dissociation hétérogène, de dissociation homogène et de dissociation électrolytique.

A propos de la vaporisation, Arrhenius étudie et critique la règle de Dühring et celle de Trouton, déduites des travaux de Ramsay et Young. Il en tire cette conséquence que la règle de Trouton n'a probablement aucun rapport avec la température critique des corps ; M. de Forcrand avait déjà émis cette opinion en 1903.

Par extension de la théorie de Van't Hoff, l'expression de l'énergie libre doit être modifiée par l'introduction du facteur i,

dans le cas des dissolutions d'électrolytes ; elle devient alors

$$A = i\,RT\,(1 + \log_e ic).$$

Entre autres conséquences intéressantes, la discussion des résultats montre que la dissociation électrolytique serait nulle au zéro absolu, s'il existait des solutions aqueuses à cette température.

IV. *Les atmosphères des planètes.* — Dans cette Conférence, Arrhenius étudie l'évolution de la vie d'une planète d'après l'observation des phénomènes physico-chimiques qui se produisent à sa surface.

Il examine d'abord la probabilité de l'existence d'une atmosphère à la surface des différentes planètes, déduite du pouvoir réfléchissant de celles-ci ; trois planètes seulement, Vénus, la Terre et Mars, en posséderaient une. Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune seraient formées de masses gazeuses ; cette conclusion est tirée de la faible densité de ces planètes éloignées, ainsi que de leur aspect ; l'étude des spectres d'absorption indique que l'hydrogène abonde dans Uranus et Neptune.

L'Auteur expose enfin une théorie intéressante de la genèse des gaz qui constituent l'atmosphère terrestre actuelle, de la formation de la croûte terrestre et de l'apparition de la vie végétale ; l'anhydride carbonique aurait une influence prépondérante dans cette évolution. Il développe des considérations analogues pour Vénus et pour Mars.

V. *Les conditions physiques sur la planète Mars.* — Les canaux de Mars y sont assimilés aux lignes géotectoniques que l'on trouve sur certains points du globe terrestre. Les conditions climatériques probables sont ensuite soigneusement discutées, en particulier la température et l'état hygrométrique ; la température moyenne sur cette planète paraît être très sensiblement inférieure à 0°.

H. Giran.

LEBON (ERNEST). — SAVANTS DU JOUR : ÉMILE PICARD : *Biographie. Bibliographie analytique des Écrits.* Seconde édition entièrement refondue, avec un Portrait en héliogravure, 1 vol. in-8 jésus, papier de Hollande, IV-96 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1er mai 1914.

En présentant ce Livre à l'Académie des Sciences, dans la séance du 15 juin 1914, M. Gaston Darboux, Secrétaire perpétuel, s'est exprimé en ces termes :

« Il y a bien près de quatre ans, le 20 juin 1910, en présentant à l'Académie le troisième Volume de la Collection des *Savants du Jour* entreprise par M. Ernest Lebon, je faisais ressortir toutes les qualités qui recommandaient à l'attention du monde savant ce volume consacré à notre confrère M. Émile Picard. Je faisais remarquer que, comme tous ceux de cette belle Collection, il se recommandait par une abondance dans les informations, une sûreté dans les renseignements qui devaient faire de la Collection de M. E. Lebon le guide le plus précieux pour les futurs historiens de la Science.

» L'accueil qui a été fait aux différentes Notices de M. Lebon a confirmé toutes mes prévisions : plusieurs d'entre elles ont été rapidement épuisées. Il était devenu nécessaire de réimprimer en particulier celle qui était consacrée à M. Émile Picard.

» Cette nouvelle édition se recommande par les mêmes mérites que l'ancienne, et l'Auteur l'a scrupuleusement tenue au courant en rappelant tous les travaux d'Analyse mathématique, de Physique mathématique, de Philosophie que M. Émile Picard a publiés depuis 1910. M. Lebon n'a eu garde d'oublier les Articles sur les recherches relatives au Problème des trois corps et la Notice sur Henri Poincaré, où les travaux de notre regretté confrère sont appréciés avec tant d'autorité. »

En faisant précéder les principales sections de son travail d'appréciations dues à des savants, l'Auteur y a introduit des éléments qui font oublier la sécheresse inévitable de suites d'énumérations de titres d'écrits, bien que ces titres soient le plus souvent accompagnés de sobres explications. C'est pourquoi il pense que l'Ouvrage est à la fois intéressant pour les personnes

qui désirent connaître, seulement dans son ensemble, l'œuvre de M. Émile Picard, très utile à celles qui se livrent à des recherches dans le domaine si étendu de l'Analyse pure et de la Théorie des Fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Il espère avoir signalé tous les Écrits originaux de M. Émile Picard et les principales analyses dont ils ont été le sujet. Ce n'est qu'après les avoir lus ou parcourus qu'il a donné les références et les renseignements qui s'y rapportent. On rendrait service à la Science en signalant les omissions à l'Auteur.

TABLE DES MATIÈRES.

Section I. *Biographie.* Notice sur M. Émile Picard. Grades. Fonctions. Titres honorifiques. Prix. Décorations. — Section II. *Analyse mathématique.* Analyse pure. Ouvrages. Mémoires. Notes : Groupes et Fonctions. Équations différentielles; Analyse appliquée à l'Arithmétique et à l'Algèbre. Mémoires. Notes. Analyse appliquée à la Géométrie. Mémoires. Notes. — Section III. *Fonctions et Surfaces algébriques.* Rapport de M. Henri Poincaré sur le Grand Prix des Sciences mathématiques en 1888. Analyse par M. F. Enriques du Traité des fonctions algébriques. Fonctions algébriques. Ouvrages. Mémoires. Notes. Courbes et surfaces algébriques. Mémoires. Notes. — Section IV. *Mécanique analytique et Physique mathématique.* Mécanique analytique. Mémoires. Notes. Physique mathématique. Mémoires. Notes. — Section V. *Philosophie scientifique et Histoire des Sciences.* Lettre de M. Alfred Picard à M. Émile Picard. Analyse par M. Lucien Poincaré du Rapport sur les Sciences. Ouvrages. Philosophie scientifique. Conférence. Articles. Histoire des Sciences. Discours nécrologiques. Discours. Notices nécrologiques. Articles. Rapports. Comptes rendus. Préfaces. Présentations. Analyse. — Section VI. *Publications diverses.* Questions proposées. Traductions. Discours. Enseignement.

MÉLANGES.

SUR LES COURBES ALGÉBRIQUES DÉFINIES PAR UNE REPRÉSENTATION PARAMÉTRIQUE;

PAR M. PAUL APPELL.

I. Quand une courbe algébrique d'ordre n est définie par une représentation paramétrique propre

$$X = f(t), \qquad Y = \varphi(t),$$

f et φ étant des fonctions rationnelles, elliptiques ou automorphes de t, l'équation de la courbe s'obtient évidemment par l'élimination de t. Je me propose d'indiquer le résultat de cette élimination, sous une forme conduisant à quelques déterminants qui me paraissent dignes d'attention.

II. Prenons d'abord une conique en coordonnées homogènes :

$$x = \rho P(t), \qquad y = \rho Q(t), \qquad z = \rho R(t),$$

où ρ est un facteur de proportionnalité, et où P, Q, R désignent des polynomes du second degré en t. La courbe étant définie par cinq points correspondant aux valeurs t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 du paramètre, son équation est

$$\Delta = \begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & yz & zx & xy \\ P_1^2 & Q_1^2 & R_1^2 & Q_1R_1 & R_1P_1 & P_1Q_1 \\ P_2^2 & Q_2^2 & R_2^2 & Q_2R_2 & R_2P_2 & P_2Q_2 \\ P_3^2 & Q_3^2 & R_3^2 & Q_3R_3 & R_3P_3 & P_3Q_3 \\ P_4^2 & Q_4^2 & R_4^2 & Q_4R_4 & R_4P_4 & P_4Q_4 \\ P_5^2 & Q_5^2 & R_5^2 & Q_5R_5 & R_5P_5 & P_5Q_5 \end{vmatrix} = 0,$$

où l'on a écrit P_i, Q_i, R_i pour $P(t_i)$, $Q(t_i)$, $R(t_i)$.

Mais l'équation de la courbe

$$F(x, y, z) = 0$$

étant indépendante de t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 et le déterminant Δ se

réduisant à zéro quand $t_i = t_k$, on a identiquement

$$\Delta \equiv F(x, y, z) \prod_{i,k} (t_i - t_k),$$

$F(x, y, z)$ étant un polynome homogène en x, y, z indépendant de t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 et $\Pi(t_i - t_k)$ désignant le produit des différences des quantités t_ν associées deux à deux.

On peut supposer les cinq points infiniment voisins. On a alors une identité de la forme

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & z^2 & yz & zx & xy \\ P^2 & Q^2 & R^2 & QR & RP & PQ \\ (P^2)' & (Q^2)' & (R^2)' & (QR)' & (RP)' & (PQ)' \\ (P^2)'' & (Q^2)'' & (R^2)'' & (QR)'' & (RP)'' & (PQ)'' \\ (P^2)''' & (Q^2)''' & (R^2)''' & (QR)''' & (RP)''' & (PQ)''' \\ (P^2)^{\text{iv}} & (Q^2)^{\text{iv}} & (R^2)^{\text{iv}} & (QR)^{\text{iv}} & (RP)^{\text{iv}} & (PQ)^{\text{iv}} \end{vmatrix} \equiv F(x, y, z),$$

les accents désignant des dérivées prises par rapport à t. Le second membre est indépendant de t; on vérifie d'ailleurs immédiatement que la dérivée de ce dernier déterminant, par rapport à t, est *nulle*.

III. Prenons maintenant une courbe unicursale d'ordre n, en supposant $P(t)$, $Q(t)$, $R(t)$ du $n^{\text{ième}}$ degré; la courbe est définie par

$$p = \frac{n(n+3)}{2}$$

points, correspondant aux valeurs $t_1, t_2, \ldots, t_p$ du paramètre. Son équation sera encore obtenue en égalant à zéro le déterminant

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \ldots & x^\alpha y^\beta z^\gamma & \ldots \\ \ldots & P_1^\alpha Q_1^\beta R_1^\gamma & \ldots \\ \ldots & P_2^\alpha Q_2^\beta R_2^\gamma & \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & P_p^\alpha Q_p^\beta R_p^\gamma & \ldots \end{vmatrix},$$

où l'on a écrit une colonne, les diverses colonnes s'obtenant en donnant aux entiers positifs ou nuls α, β, γ toutes les déterminations pour lesquelles

$$\alpha + \beta + \gamma = n;$$

ce déterminant est du degré n^2 par rapport à chaque t_i. En appelant encore $F(x, y, z)$ le premier membre de l'équation de la courbe, F étant un polynome de degré n, Δ contiendra aussi F en facteur. Il contiendra évidemment en facteur le produit

$$\prod_{i,k}(t_i - t_k)$$

de toutes les différences des quantités t_ν deux à deux. Mais ce produit est seulement de degré $p-1$ en t_i. Le déterminant contient donc d'autres facteurs qu'on obtient, comme il suit, par la considération des points multiples. Je suppose, pour simplifier, les points doubles à tangentes distinctes. Il y a

$$q = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

points doubles. Appelons (a_1, b_1), (a_2, b_2), ..., (a_q, b_q) les couples de valeurs de t qui donnent ces points. Le premier point double sera obtenu, par exemple, pour $t = a_1$ et pour $t = b_1$, etc. Il est évident que le déterminant s'annule si l'on fait $t_i = a_1$, $t_k = b_1$, car les éléments de deux lignes deviennent proportionnels.

Considérons une courbe variable C d'ordre n. Elle coupe la courbe donnée en n^2 points variables sur lesquels on peut en prendre, comme il est connu,

$$n^2 - q = \frac{n(n+3)}{2} - 1 = p - 1$$

arbitrairement. Appelons $t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}, t_p, \ldots, t_{n^2}$ les paramètres de ces n^2 points. Ces paramètres sont liés par q relations classiques fournies par le théorème d'Abel (*voir*, par exemple, Briot et Bouquet, *Géométrie analytique* : Notions sur les courbes unicursales). Ces relations sont

$$(2)\quad (t_1 - a_i)(t_2 - a_i)\ldots(t_{n^2} - a_i) - \lambda_i(t_1 - b_i)(t_2 - b_i)\ldots(t_{n^2} - b_i) = 0,$$

où

$$i = 1, 2, \ldots, q,$$

les λ_i étant certaines constantes déterminées. Entre ces q relations,

éliminons les paramètres

$$t_{p+1},\quad t_{p+2},\quad \ldots,\quad t_{n^2},$$

au nombre de

$$n^2 - p = q - 1;$$

nous obtiendrons entre $t_1, t_2, \ldots, t_p$ une relation symétrique

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_p) = 0 \tag{3}$$

de degré q par rapport à chacune des variables. Quand $t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$ sont donnés, cette relation donne, pour le paramètre du point associé t_p, q valeurs. Mais, si les valeurs des paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_p$ vérifient cette relation (3), il passe une infinité de courbes d'ordre n par les points correspondants; l'équation obtenue, en égalant à zéro le déterminant D défini par l'expression (1), est alors identiquement vérifiée. Le déterminant D contient donc Φ en facteur et l'on a

$$\Delta = F(x, y, z)\Phi \prod_{i,k} (t_i - t_k), \tag{4}$$

i, k prenant les valeurs associées deux à deux $1, 2, 3, \ldots, p$. Dans cette expression, le second membre est bien du degré voulu en $t_1, t_2, \ldots, t_p$, car il est de degré

$$q + p - 1 = n^2.$$

Il sera facile, comme plus haut, d'écrire cette identité quand les p valeurs $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sont infiniment voisines d'une même valeur t.

IV. Une méthode analogue s'applique au cas où $\frac{P}{R}$ et $\frac{Q}{R}$ sont des fonctions elliptiques ou des fonctions automorphes. Je considère d'abord une cubique de genre 1.

Supposons donc que P, Q, R soient des fonctions Θ elliptiques d'ordre 3, de telle nature que $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$ soient doublement périodiques aux périodes $2K$ et $2iK'$. Le déterminant (1), où

$$\alpha + \beta + \gamma = 3,$$

égalé à zéro, donne l'équation de la courbe; actuellement $p = 9$.

Le déterminant sera divisible par

$$\prod_{i,k} \mathrm{H}(t_i - t_k),$$

qui est une fonction Θ d'ordre 8; mais comme Δ est en t_i d'ordre 9, il contient en facteur une autre fonction du premier ordre. Si les neuf points $t_1, t_2, \ldots, t_9$ sont à l'intersection de la courbe dont nous cherchons l'équation avec une autre courbe du troisième ordre, la courbe représentée par $\Delta = 0$ est indéterminée; donc Δ est nul identiquement. Or, la condition que remplissent les neuf points est alors

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_9 \equiv \mathrm{A}$$

à des multiples des périodes près, A étant une certaine constante. Le déterminant s'annule donc en même temps que

$$\mathrm{H}(t_1 + t_2 + \ldots + t_9 - \mathrm{A})$$

et l'on a

$$\Delta \equiv \mathrm{F}(x, y, z)\mathrm{H}(t_1 + t_2 + \ldots + t_9 - \mathrm{A}) \prod_{i,k} \mathrm{H}(t_i - t_k),$$

$\mathrm{F}(x, y, z)$ étant le premier membre de l'équation de la courbe.

Les déterminants qui se présentent ici doivent être rapprochés de ceux qu'Hermite a considérés (*Journal de Crelle*, t. 82, p. 346) et de ceux que j'ai donnés (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I, p. 155, et t. V, p. 217).

V. Prenons enfin une courbe de genre 1 et de degré n avec $q - 1$ points doubles, correspondant aux valeurs

$$(a_1, b_1), \quad (a_2, b_2), \quad \ldots, \quad (a_{q-1}, b_{q-1})$$

du paramètre elliptique t, les quantités a_i, b_i étant définies à des multiples près des périodes. Comme P, Q, R sont alors des fonctions Θ d'ordre n, le déterminant (1) est une fonction Θ d'ordre n^2. Il est d'abord divisible par $\prod \mathrm{H}(t_i - t_k)$. Pour avoir l'autre facteur, coupons la courbe donnée par une courbe variable C d'ordre n. Les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_{n^2}$ des n^2 points communs

vérifient les q relations

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{c} t_1 + t_2 + \ldots + t_{n^2} = \Lambda, \\ \dfrac{\Pi(t_1 - a_i)\Pi(t_2 - a_i)\ldots\Pi(t_{n^2} - a_i)}{\Pi(t_1 - b_i)\Pi(t_2 - b_i)\ldots\Pi(t_{n^2} - b_i)} - \lambda_i = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, q-1). \end{array}\right.$$

Si nous tirons t_{n^2} de la première pour la porter dans les suivantes, nous obtenons $(q-1)$ équations

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\Pi(t_1 - a_i)\Pi(t_2 - a_i)\ldots\Pi(t_1 + t_2 + \ldots + t_{n^2-1} + a_i - \Lambda)}{\Pi(t_1 - b_i)\Pi(t_2 - b_1)\ldots\Pi(t_1 + t_2 + \ldots + t_{n^2-1} + b_i - \Lambda)} = \lambda_i \\ (i = 1, 2, \ldots, q-1), \end{array}\right.$$

dont le premier membre est une fonction doublement périodique de chacun des paramètres restants $t_1, t_2, \ldots, t_{n^2-1}$. Éliminons alors $t_{p+1}, t_{p+2}, \ldots, t_{n^2-1}$, qui sont au nombre de $n^2 - 1 - p = q - 2$ entre ces $(q-1)$ équations, nous aurons une relation symétrique en $t_1, t_2, \ldots, t_p$ dont le premier membre est une fonction elliptique de chacun de ces paramètres. En multipliant par un produit de fonctions Π convenablement choisies, on transformera cette relation en une relation de la forme

$$\Phi(t_1, t_2, \ldots, t_p) = 0,$$

où Φ est une fonction Θ d'ordre q. On a alors pour le déterminant (1)

$$\Delta = F(x, y, z)\Phi \prod_{i,k} \Pi(t_i - t_k),$$

où le second membre est par rapport à chaque paramètre t_i une fonction Θ d'ordre

$$q + p - 1 = n^2.$$

Je me borne à signaler, sans l'écrire, la formule obtenue en supposant les valeurs $t_1, \ldots, t_p$ infiniment voisines d'une même valeur t.

Le cas des fonctions automorphes pourra être traité de même, à l'aide des méthodes indiquées par M. Humbert dans son Mémoire sur l'application des fonctions fuchsiennes à la Géométrie (*Journal de Mathématiques* de M. Jordan, 4e série, t. II, 1886).

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SOMMERVILLE (D. M. Y.). — THE ELEMENTS OF NON-EUCLIDEAN GEOMETRY. (*Bell's Mathematical Series for Schools and Colleges.*) 1 vol. in-8 couronne, XVI-274 pages. London, G. Bell and Sons, 1914.

Ce Livre relatif à la Géométrie non euclidienne fait partie de la « Bell's Mathematical Series for Schools and Colleges », collection de livres d'enseignement. Mais, tandis que les livres déjà parus dans cette collection semblaient, par leurs titres, s'adresser à des élèves, celui-ci paraît plutôt destiné aux maîtres ou aux futurs maîtres désireux d'élargir leur horizon et de dominer leur enseignement. Les méthodes modernes d'enseignement de la Géométrie font avec raison un appel fréquent à l'intuition et le maître évite ainsi au sujet du postulat d'Euclide les questions indiscrètes de ses jeunes disciples : mais il n'en sera pas moins amené à étudier dans le détail la nature et le rôle des axiomes, pour la satisfaction personnelle de son esprit et aussi pour pouvoir concilier en connaissance de cause l'intuition et la logique dans son enseignement : il pourra ainsi donner à cet enseignement toute la rigueur compatible avec le degré de compréhension de ses élèves. Tous les professeurs ont d'ailleurs entendu parler de la Géométrie non euclidienne ; ils ont tous lu dans les livres de Philosophie mathématique de Poincaré que plusieurs géométries sont logiquement possibles, qu'aucune n'est plus vraie qu'une autre, que la forme euclidienne est simplement une forme plus commode que les autres ; mais combien, parmi ces professeurs, ont pu satisfaire un peu plus leur curiosité et connaître avec quelque détail ces diverses géométries, en faire l'étude comparative et se convaincre ainsi que le moule euclidien nous a été imposé surtout par une habitude séculaire? Les notes très intéressantes et très suggestives contenues dans certains Traités de Géométrie, par exemple celle de Poincaré qui figure dans les dernières éditions du *Traité de Géométrie* de Rouché, ou celle de M. Hadamard dans ses *Leçons de Géométrie*, si elles satisfont cette curiosité, sont bien faites pour

inspirer au lecteur un vif désir d'aller encore plus loin et de trouver, sans avoir recours aux Mémoires originaux, un Ouvrage où la Géométrie non euclidienne soit présentée sous ses divers aspects.

Le Livre de M. Sommerville me paraît remplir entièrement ce but. L'auteur n'a négligé aucun des aspects de la question. On sait que la Géométrie non euclidienne se rattache aux plus belles théories mathématiques, théorie des groupes, formes différentielles, transformations projectives, représentation conforme, surfaces à courbure constante. Sans même avoir une culture mathématique très étendue, le lecteur trouvera dans la lecture du Livre de M. Sommerville une occasion de s'initier à ces diverses théories: la connaissance des Mathématiques élémentaires, des éléments de la Géométrie analytique et des éléments de l'Analyse lui suffiront pour lire l'Ouvrage avec fruit. En dehors de toute préoccupation pédagogique, cette lecture mettra le lecteur en contact avec des théories dont la portée dépasse le sujet même du Livre. S'il désire aller plus loin et pénétrer au cœur même de ces diverses théories, il trouvera dans le Livre toutes les indications nécessaires.

Bien que M. Sommerville ne se soit pas proposé d'écrire l'histoire de la Géométrie non euclidienne, mais d'étudier en elles-mêmes les théories non euclidiennes, il lui a paru à juste titre impossible de développer ces théories sans nous donner au moins un aperçu historique sur leur naissance et leur évolution. Dans l'histoire de la Géométrie non euclidienne, M. Sommerville envisage quatre périodes. La *première période* est caractérisée par l'emploi des méthodes de la Géométrie élémentaire : elle comprend les travaux des quelques précurseurs qui avaient entrevu le rôle exact du postulat d'Euclide, Saccheri, Lambert, Legendre, puis la découverte de la Géométrie non euclidienne avec Lobachewski, Bolyai et Gauss. La *seconde période* est caractérisée par l'emploi des méthodes de la Géométrie différentielle et des représentations concrètes de la Géométrie non euclidienne dans l'espace euclidien avec Riemann, Helmholtz, Sophus Lie et Beltrami. La *troisième période* est celle de l'emploi des méthodes de la Géométrie projective, avec la mesure projective des angles et des distances; on peut la faire remonter à Cayley,

créateur de la métrique projective générale, auquel il y a lieu d'associer le nom de Laguerre pour le cas particulier de la métrique projective euclidienne; mais ce nouvel aspect de la question est dû surtout à M. Klein, qui a été conduit ainsi à la classification des géométries en Géométrie hyperbolique, Géométrie elliptique et Géométrie parabolique, cette dernière étant la Géométrie euclidienne. *La quatrième période* comprend la discussion logique des axiomes de la Géométrie et la classification des géométries d'après les axiomes posés à la base de chacune d'elles : c'est la période philosophique. Aux noms de Pasch, Von Staudt, Hilbert, Peano, Russell et Whitehead, cités pas l'auteur dans sa classification, il convient d'ajouter le nom de Poincaré dont les écrits philosophiques dominent toute cette période : l'auteur ne manque d'ailleurs pas de le citer un peu plus loin lorsqu'il nous montre que la question de savoir quelle est la vraie géométrie est une question mal posée.

Indiquons maintenant la matière des divers Chapitres de l'Ouvrage.

Le Chapitre I est un chapitre d'histoire complété au début du Chapitre VI.

Les Chapitres II et III sont consacrés respectivement à la Géométrie hyperbolique et à la Géométrie elliptique, envisagées du point de vue de la Géométrie élémentaire. Nous y trouvons étudiées successivement la Géométrie plane, la Géométrie de l'espace, la Trigonométrie.

Nous signalerons dans ces deux Chapitres l'étude des surfaces particulières de l'espace hyperbolique ou de l'espace elliptique sur lesquelles la Géométrie redevient euclidienne : ce sont, en Géométrie hyperbolique, l'*horosphère* (trajectoire orthogonale d'un faisceau de droites parallèles) et en Géométrie elliptique la surface dite *surface de Clifford*, lieu des points équidistants d'une droite; cette dernière surface est une surface réglée du second degré de l'espace elliptique qui a pour homologue un tore dans la représentation conforme de l'espace elliptique sur l'espace euclidien, représentation étudiée au Chapitre V.

Le Chapitre IV est un chapitre de Géométrie analytique qui complète les deux précédents, tout en restant dans le même

ordre d'idées; on y trouve les formules relatives aux angles et aux distances, l'étude de la droite et du cercle.

Le Chapitre V, d'une importance capitale, traite de diverses correspondances entre l'espace non euclidien et l'espace euclidien, problème analogue à celui des Cartes géographiques : ces correspondances nous permettent d'avoir une vision claire de la Géométrie non euclidienne sous une forme qui ne choque pas nos habitudes d'esprit euclidiennes, puisque tous les résultats se trouvent en quelque sorte traduits dans le langage de la Géométrie euclidienne. Les diverses représentations qu'on a données à cet effet sont les suivantes : 1° *représentation projective*, dans laquelle l'ensemble des points à l'infini est représenté par une quadrique, *l'absolu*, les relations métriques étant réduites, suivant Cayley et Klein, à des relations projectives et les mouvements devenant alors des transformations projectives avec invariance de l'absolu; 2° *représentation géodésique*, dans laquelle le plan devient une surface à courbure constante : la Géométrie du plan elliptique est ainsi la même que la Géométrie euclidienne de la sphère et la Géométrie du plan hyperbolique la même que la Géométrie euclidienne de la pseudo-sphère; 3° *représentation conforme*, dans laquelle le plan non euclidien est représenté sur le plan euclidien de façon que les lignes droites deviennent des cercles orthogonaux à un cercle fixe; cette représentation peut être étendue à l'espace, les plans devenant des sphères orthogonales à une sphère fixe.

Le Chapitre VI complète en certains points l'exposé historique du Chapitre I. L'Auteur expose succinctement, mais d'une façon claire, les points de vue de Riemann et d'Helmholtz, la notion de courbure d'un espace, la notion généralisée de mouvement d'un corps solide, puis le point de vue de Lie, dans lequel les diverses géométries correspondent à des sous-groupes du groupe général projectif, sous-groupes laissant invariante une certaine quadrique. La fin du Chapitre est consacrée à des questions d'ordre purement philosophique. L'Auteur y adopte en somme le point de vue de Poincaré; il remarque que si nous voulons nous considérer, avec Kant, comme en possession *a priori* d'un espace, charpente de nos perceptions extérieures, cet espace ne peut être qu'un espace amorphe qui n'est pas plus euclidien que non euclidien;

l'expérience ne peut d'ailleurs rien décider à cet égard et nous devons conclure, avec Poincaré, que la question de savoir quelle est la vraie géométrie n'a aucun sens et qu'il nous est impossible d'avoir la connaissance d'un espace *absolu*, de même que la connaissance d'un mouvement *absolu* nous échappe.

Dans les trois derniers Chapitres, différentes théories géométriques sont étendues au cas non euclidien, par l'utilisation des diverses méthodes étudiées dans les cinq premiers Chapitres.

Dans le Chapitre VII, l'Auteur étudie les points communs et les tangentes communes à deux cercles, les systèmes de cercles, la correspondance remarquable entre les cercles d'un plan fixe et les plans de l'espace hyperbolique due à M. Hausdorff.

Dans le Chapitre VIII, il étudie l'inversion dans le plan non euclidien et plus généralement les transformations planes qui changent les cercles en cercles, en particulier les groupes de mouvements plans non euclidiens dont l'étude est rattachée aux transformations homographiques d'une variable complexe.

Le Chapitre IX est consacré à la classification et à l'étude des coniques dans le plan non euclidien. Pour classer les coniques, on considère leurs points d'intersection avec l'absolu, ainsi que les tangentes communes à ces coniques et à l'absolu ; d'après le nombre et la nature, réelle ou imaginaire, de ces points communs et de ces tangentes communes, on a diverses espèces de coniques. Comme l'absolu est une conique quelconque, cela revient simplement à étudier les points communs et les tangentes communes à deux coniques quelconques du plan euclidien, mais il est intéressant de voir à ce point de vue l'extension des propriétés focales et métriques des coniques dont l'Auteur s'occupe particulièrement.

A la suite de chaque Chapitre, M. Sommerville a proposé des exercices destinés à servir d'exemples ou à énoncer quelques propriétés particulières dont le développement dans le texte aurait alourdi l'exposition.

L'Ouvrage, d'une rédaction simple et élégante, est écrit et édité dans cette forme agréable à l'esprit et aux yeux à laquelle auteurs et éditeurs de langue anglaise nous ont depuis si longtemps accoutumés.

S. Lattès.

CONTENSON (Louis de). — Les Fondements mathématiques dans l'hypothèse de la Philosophie critique (Système cartésio-kantien). (Tome I de *La certitude mathématique*). 1 vol. gr. in-8. 93 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

Dans cette Brochure qui reproduit une grande partie d'un Article paru dans la *Revue de Philosophie*, l'auteur « étudie la certitude mathématique en analysant les fondements de cette science (mathématique) lorsqu'on se place dans l'hypothèse formulée par les philosophes critiques, c'est-à-dire que l'on récuse les témoignages des sens, mais que l'on admet l'existence des vérités dites *innées* ou *immanentes* ». Ce travail sera suivi d'un autre ayant pour titre : *La certitude mathématique :* II. *Les fondements mathématiques dans l'hypothèse du doute complet*. Disons tout de suite que la place qui nous est accordée pour présenter ce très intéressant Ouvrage étant fort restreinte, nous nous bornerons à en donner un plan et à rendre compte beaucoup trop brièvement de ce qu'il contient, tout en regrettant de ne pouvoir le faire avec plus d'ampleur et esquisser quelques-unes des discussions qu'appellent les idées originales et fécondes de M. de Contenson.

L'Auteur considère comme acquis que l'entendement anthropomorphe ne peut atteindre l'objet *in se*, mais seulement l'image qu'en fournit la sensibilité. Il estime que c'est un des résultats de la psychologie rationnelle. Deux hypothèses se présentent alors, lorsqu'il s'agit de constituer l'entendement humain suivant que la sensibilité ne nous trompe pas ou bien qu'au contraire elle nous trompe ou est, pour le moins, susceptible de nous tromper. D'autre part, il est également admis que le sujet conscient se trouve en présence d'un certain nombre de concepts, d'idées innées qui semblent bien ne pas avoir comme origine le monde extérieur. Bien que paraissant s'imposer de façon impérieuse, ces *idées innées*, ces *jugements a priori* peuvent être mis en doute sans que cela puisse être qualifié d'absurde. De là, deux nouvelles hypothèses dans la théorie de la connaissance : les lois de l'immanence sont vraies ou bien elles sont incertaines et ne peuvent servir à constituer la connaissance certaine. La combinaison de ces deux dernières hypothèses avec les précédentes conduit à

quatre modalités distinctes dans la façon de fonder l'entendement humain : (α) La sensibilité n'est pas trompeuse et les lois de l'immanence sont vraies; la connaissance humaine s'établit sur ces deux bases: c'est ce qu'on a admis jusqu'aux philosophes critiques, jusqu'à Descartes, encore qu'on puisse trouver avant lui quelques précurseurs du mouvement critique. (β) La sensibilité donne des images exactes, mais le doute est jeté sur l'innéisme. C'est l'opinion la plus instinctive, la plus facile à admettre à un premier examen. (γ) Suspectant la sensibilité et proclamant l'intangibilité des lois de l'immanence, on se trouve dans l'hypothèse critique, celle de Descartes et de Kant. Toute science atteignant la certitude absolue ne peut avoir comme bases que des jugements *a priori*. Ce travail a pour but l'étude des fondements de la science mathématique dans ce système philosophique appelé *cartésio-kantien*. (δ) Enfin, on peut révoquer en doute et la sensibilité et l'immanence; c'est se placer, suivant l'expression de M. de Contenson, dans l'hypothèse du doute complet. Les fondements mathématiques dans ce cas paraissent assez difficiles à découvrir; où trouver une source non suspecte dans ce terrain entièrement desséché par un doute aussi complet? Ces fondements feront l'objet d'un prochain travail de l'auteur.

Le but de M. de Contenson est « d'analyser et de critiquer la notion de jugement synthétique *a priori* » qu'il croit défectueuse. Pour atteindre ce but, il fait un examen philosophique de la doctrine de l'innéisme (Chap. I) et un examen mathématique de cette même doctrine (Chap. II); il donne enfin un aperçu de l'état actuel de la question des fondements mathématiques (Chap. III). C'est à Kant que s'attaque M. de Contenson et non à Descartes, le fondateur de la philosophie critique, d'abord parce que c'est Kant qui a développé complètement la doctrine, ensuite par respect pour l'inventeur de la Géométrie analytique dont la découverte extrêmement féconde devait conduire Newton et Leibniz au calcul infinitésimal. « ..... Descartes ne juge pas les idées innées, dit M. de Contenson. Il les admet et montre qu'il reste logique avec lui-même. Il trouvait du reste peut-être plus intéressant d'inventer la géométrie analytique qui a permis les découvertes du Calcul différentiel et intégral et décuplé ainsi, pour ne pas dire plus, le domaine des Mathématiques, que de ratiociner à perte de vue sur ses fon-

dements. Kant s'est livré à ce travail plus approprié à son génie, c'est pourquoi nous nous en prenons à lui. » Et, en effet, l'auteur s'en prend bien à lui; son Ouvrage qui, à certains points de vue, vient bien à son heure, est une critique mordante, sévère quoique juste et dialectiquement faite, de la philosophie kantienne dans ses rapports avec les sciences exactes.

Dans le premier Chapitre, consacré à l'examen de l'innéisme au point de vue philosophique, l'Auteur rappelle que la certitude complètement apodictique des Mathématiques est un acte de foi pour Kant, et c'est même de l'existence d'une science ayant ce caractère de nécessité absolue que ce philosophe déduit l'immanence et également la certitude des axiomes fondamentaux des Mathématiques. M. de Contenson reproche à Kant (et c'est un reproche qu'il lui adressera dans tout le cours de son travail) « de renverser l'ordre normal des choses » de prendre les prémisses pour la conclusion et *vice versa*. Une très courte digression sur la morale kantienne lui permet de rappeler que lorsque l'éminent philosophe de Königsberg veut fonder l'éthique, c'est de l'impératif catégorique qu'il déduit Dieu comme postulat de la moralité, à l'inverse de ce qu'on fait habituellement. D'ordinaire, également, on s'attache à prouver l'intangibilité des axiomes mathématiques; après quoi, on en conclut la possibilité de l'existence d'une science exacte. Le renversement conçu sur ce type est érigé chez Kant en méthode de raisonnement, et l'Ouvrage de M. de Contenson est rempli d'exemples de son emploi [1]. Toutes les personnes un peu familiarisées avec les Mathématiques supérieures, les principes et les méthodes de l'Analyse, ont éprouvé, en lisant Kant, de grosses déceptions; celles-ci ont pour cause la

---

[1] Un rapprochement, que nous ne pouvons que signaler ici, s'impose entre l'Ouvrage de M. de Contenson et *Le fondement de la morale*, de Schopenhauer. Tandis que le premier s'attaque à la *Critique de la Raison pure*, et aux *Jugements a priori* dans les sciences exactes, le second s'est attaqué à la *Critique de la Raison pratique* et à *l'impératif catégorique*. Bien des arguments sont communs dont le rapprochement serait instructif. Le reproche signalé dans les dernières lignes est déja adressé véhémentement à Kant par Schopenhauer. Entre les deux Ouvrages cités, il y a des analogies très nettes et même une certaine communauté dans les méthodes de critique et dans le ton ironique de certains passages. Cette communauté s'explique par l'unité de la philosophie kantienne qui la rendait possible.

médiocrité des connaissances scientifiques du philosophe. M. de Contenson donne des exemples qui révèlent, chez l'auteur de la *Critique de la Raison pure*, « une réelle incompréhension des Mathématiques ». Les lecteurs de ce Bulletin en ont tous relevé de ces erreurs ou de ces sottises [confusions entre les notions de grandeur et de nombre, par exemple; phrases inintelligibles comme celle-ci : « Toute proposition géométrique, par exemple qu'un triangle a trois angles, est absolument nécessaire (1) »] dont l'Auteur donne quelques exemples topiques. Le manque de connaissances scientifiques de Kant est l'un des points mis en évidence par M. de Contenson lorsque celui-ci a cherché à reconstituer la mentalité du fondateur de la théorie de l'innéisme. Il est déjà de nature à porter atteinte à la confiance qu'on peut avoir dans cette doctrine.

Aux critiques précédentes adressées à l'innéisme et à son fondateur, succède l'examen philosophique de la doctrine au point de vue logique. M. de Contenson s'attache à établir que les concepts de temps et d'espace ne peuvent être absolument subjectifs et, pour y arriver, c'est avec les propres arguments et en s'appuyant sur les propres textes de Kant qu'il combat ce dernier. Que ces concepts soient forcément subjectifs, c'est ce qui découle des hypothèses initiales, mais qu'ils soient immanents, « c'est une hypothèse toute gratuite et probablement fausse ». Ou bien ils sont déduits des concepts spatiaux et temporels que nous fournit l'expérience et ils conduisent à une science qualifiable d'expérimentale et ne pouvant atteindre la certitude apodictique; ou bien alors, pense l'Auteur, il faut se jeter dans l'idéalisme pur de Hegel pour tenter de sauver l'innéisme, mais la science mathématique serait sans aucune valeur universelle puisque rien ne saurait en avoir dans ce système hégelien où tout est subjectif. A la vérité, nous devons avouer que ce point nous apparaît comme l'un des plus délicats de l'argumentation de l'Auteur : est-il bien indispensable d'admettre, comme il semble l'affirmer, l'universelle subjectivité de la philosophie d'Hegel? Mais nous nous sommes interdit toute critique.

---

(1) *Critique de la Raison pure* (traduction Tremesaygues et Pacaud), p. 491.

Dans le Chapitre II se trouve fait l'examen mathématique de l'innéisme. M. de Contenson, y mettant « directement le philosophe aux prises avec les réalités mathématiques », y trouve « la brutalité écrasante des faits pratiques ». Ses attaques sont encore plus violentes parce que, dit-il : « il s'agit de relever des erreurs non plus de tendance, mais de résultat ». Examinant d'abord la question *a priori* et théoriquement, puis pratiquement et en entrant dans le détail à l'aide de quelques exemples judicieusement choisis, il s'attache à prouver que les principes fondamentaux des Mathématiques ne sont ni synthétiques, ni *a priori* et même plus, qu'ils ne peuvent être des jugements. C'est la ruine de l'édifice kantien dont les fondations sont complètement détruites. Que Kant reconnaisse à la science mathématique une certitude parfaitement apodictique, qu'il attribue à ses axiomes un caractère d'absolue nécessité, c'est tout à fait indéniable. Or, si les principes fondamentaux de cette science ne peuvent être faux, c'est se jeter de propos délibéré dans l'absurde, c'est faire acte de foi que d'admettre leurs contraires. Cependant, nous savons très bien que cela revient tout simplement, dans la plupart des cas, à se placer dans un autre *système* mathématique, lequel peut être tout aussi cohérent que le premier. Les mathématiciens modernes se sont complu à construire ainsi de très nombreux *systèmes* ayant tous le même caractère de certitude apodictique, leurs conclusions présentant au même degré un caractère d'absolue nécessité. Mais alors, les principes fondamentaux des Mathématiques ne s'imposent pas nécessairement puisqu'ils ont même un caractère conventionnel et qu'il n'est, la plupart du temps, pas plus absurde d'admettre l'un d'eux que la proposition qui lui est diamétralement opposée. Nous sommes très loin de ce que croyait Kant.

Le premier exemple que choisit M. de Contenson pour l'analyse pratique des jugements synthétiques *a priori* est relatif aux trois dimensions de l'espace. « L'espace total a trois dimensions et l'espace, en général, ne peut en avoir lui-même un plus grand nombre. C'est là une conséquence de cette proposition qu'en un point ne peuvent se couper plus de trois lignes à angle droit. Mais cette conception ne peut se déduire de concepts. Elle repose immédiatement sur une intuition pure *a priori* parce qu'elle est

apodictiquement certaine [1]. » Cet alinéa de Kant est qualifié par l'auteur de « véritable poème ». D'abord, c'est sur un principe expérimental et qu'il ne donne même pas comme *a priori*, que le philosophe fait reposer l'existence des trois dimensions de l'espace. Ensuite, il semble confondre l'espace en général avec l'espace réel où nous vivons; bien plutôt, Kant prouve qu'il n'a rien compris à l'espace du mathématicien. L'étude des hyperespaces étant aujourd'hui classique, on comprendra aisément l'erreur grossière qu'il commet. A la fin, on voit un nouvel exemple du renversement, grâce auquel l'illustre philosophe essaie de donner l'illusion qu'il retombe toujours sur ses pieds. Il vient de donner pour prouver les trois dimensions de l'espace, un principe *a posteriori* et exclusivement expérimental; mais comme il postule que l'espace a certainement trois dimensions, que c'est apodictiquement certain, il faut bien que ceci repose sur une intuition pure et *a priori*. Remarquons aussi : « Mais cette conception ne peut se déduire de concepts ». Quel sens peut-on accorder à cette phrase? C'est un de ces passages où l'on est profondément déçu en lisant Kant.

Le *paradoxe des figures symétriques* par rapport à un plan, identiques et cependant non superposables, naturellement aussi incompris que l'espace à quatre dimensions, a fait commettre à Kant quelques erreurs et l'a conduit à écrire quelques lignes où se remarquent le ton d'ironie méprisante et un certain pédantisme dont il se départit rarement à l'égard de ceux qui n'admettent pas ses théories; nous voudrions bien donner aux lecteurs le désir de relire ces lignes dans les *Prolégomènes*. Les Mathématiques modernes ont montré que le philosophe était bien loin de la vérité. L'Auteur lève aisément le paradoxe que signale Kant : deux figures symétriques par rapport à une droite de leur plan ne peuvent être amenées en coïncidence sans quitter ce plan, la coïncidence ne s'obtient qu'en passant dans l'espace à trois dimensions par une rotation. De même une rotation dans l'espace à quatre dimensions fait coïncider deux figures symétriques par rapport à un plan. D'une façon générale : un espace euclidien E_n

---

[1] *Prolégomènes à toute Métaphysique future qui pourra se présenter comme science* (traduction des élèves de l'École Normale), p. 62.

à n dimensions peut tourner autour d'un espace euclidien E_{n-1} à $(n-1)$ dimensions en décrivant un espace E_{n+1} à $(n+1)$ dimensions et deux figures de E_n symétriques par rapport à E_{n-1} arrivent en coïncidence. Ces notions de géométrie élémentaire, indispensables pour comprendre la symétrie, sont aujourd'hui familières, même aux personnes qui n'ont fait qu'aborder les éléments de la science.

Enfin, parlant des géométries non euclidiennes, l'Auteur n'a pas peine à démolir de fond en comble les théories kantiennes sur les fondements mathématiques. Les recherches modernes rendent l'erreur de Kant manifeste; mais, même au temps où vivait le philosophe, une compréhension saine des travaux de ses devanciers et de ses contemporains, jointe à l'emploi d'une logique impeccable, l'auraient empêché de tomber dans des erreurs souvent grossières.

M. de Contenson montre, en terminant son Ouvrage par un aperçu de l'état actuel de la question des fondements mathématiques, qu'il n'y a pas à se poser la question de la certitude des bases mathématiques. Une fois le principe de contradiction admis, on envisage tous les cas possibles pour les prémisses, on en déduit les cas correspondants pour les conclusions. « En Mathématiques, on pose des hypothèses, on fait des conventions et l'on tire des conséquences. » Ces conventions répondent d'ordinaire à un postulat de commodité, c'est la théorie formulée par Poincaré. (Il ne faut, bien entendu, pas confondre avec ces questions celle de l'applicabilité de la géométrie euclidienne à l'espace où nous vivons. Que ce dernier espace soit euclidien, ait trois ou quatre dimensions, cela n'a rien à voir avec les Mathématiques pures, lesquelles se construisent en dehors de toute expérience.)

Nous n'insisterons pas ici sur la rapide revue des Mathématiques modernes passée par l'Auteur. Ce qu'il dit relativement aux espaces à n dimensions, au postulat d'Euclide, à la pangéométrie, à la courbure des espaces, aux axiomes, aux ensembles et à l'identité de la notion de grandeur et du concept général de groupe, est très connu et devient de jour en jour plus classique. Enfin, la conclusion de l'Ouvrage est ce passage de Poincaré : « Ces axiomes géométriques ne sont ni des jugements synthétiques *a priori*, ni des faits expérimentaux. Ce sont des conventions. Notre choix parmi toutes les conventions possibles est guidé par l'expérience,

mais il reste libre et n'est limité que par la nécessité d'éviter toute contradiction. C'est ainsi que les postulats peuvent rester rigoureusement vrais [1] quand même les lois expérimentales qui ont déterminé leur adoption ne sont qu'approximatives. »

Si nous nous sommes interdit toute critique de fond, nous ne pouvons cependant terminer cette analyse sans faire quelques remarques. L'Auteur, qui reproche vivement à la plupart des philosophes de ne pas savoir de Mathématiques, aurait dû soigner la forme et le style qui sont très importants en philosophie. Or, il y a d'innombrables incorrections dans son travail. La deuxième phrase du Nota n'est pas française. Nous lisons (p. 12) après trois phrases où il est parlé de Dieu : « De même après avoir montré le caractère certain des axiomes mathématiques, on conclut à la possibilité de cette science comme exacte. » Quelle science? Et plus loin (p. 32) : « Si le temps est réellement la forme de l'intuition sensible, il en résulterait.... » Enfin, une erreur mathématique ne peut être passée sous silence. Lorsque (p. 83 et 84) M. de Contenson parle de la courbe de Peano, il oublie qu'il est impossible d'établir une correspondance *biunivoque* et *continue* entre *tous* les points du segment (0, 1) et *tous* les points du carré de côté égal à l'unité construit sur les axes. Les coordonnées de la courbe remplissant le carré ne sont pas des fonctions continues « de la position du point correspondant sur le côté du rectangle » (segment 0, 1). Cela n'aurait lieu que pour les points irrationnels si l'on adopte la correspondance définie, comme on le fait d'habitude, à l'aide des développements en fractions continues. Mais une telle correspondance *continue* est irréalisable pour *tous* les points.

GASTON COTTY.

---

[1] *La Science et l'Hypothèse*, p. 66.

MÉLANGES.

SUR LES FAMILLES DE SURFACES DONT LES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES SONT DES COURBES PLANES;

PAR M. GASTON DARBOUX.

Dans une Note insérée le 23 janvier 1905 aux *Comptes rendus* (t. CXL, p. 211), j'ai présenté quelques remarques sur une Communication de M. S. Carrus relative à la question suivante de Géométrie qui, si je ne me trompe, avait été donnée comme sujet de prix par l'Académie de Toulouse :

Déterminer toutes les familles de surfaces dont les trajectoires orthogonales sont des courbes planes.

M. Carrus avait appris à former l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre dont dépend la détermination de ces familles. J'ai montré que cette équation peut être intégrée une première fois et ramenée à une équation aux dérivées partielles du second ordre qui dépend d'une fonction arbitraire de deux variables. Je désire revenir aujourd'hui sur ce sujet pour compléter et développer les propositions que je n'ai fait qu'énoncer dans les *Comptes rendus*.

1. Soit

$$f(x, y, z) = \text{const.} \tag{1}$$

l'équation en coordonnées rectangulaires d'une famille de surfaces. Les trajectoires orthogonales de ces surfaces seront définies par les équations différentielles

$$\frac{dx}{f'_x} = \frac{dy}{f'_y} = \frac{dz}{f'_z},$$

auxquelles on peut, en introduisant une variable auxiliaire t,

donner la forme suivante :

$$(2)\qquad \frac{dx}{dt} = f'_x, \qquad \frac{dy}{dt} = f_y, \qquad \frac{dz}{dt} = f_z.$$

Si l'on pose

$$(3)\qquad f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z = 2u$$

et si l'on introduit le symbole opératoire bien connu, défini par l'équation

$$(4)\qquad \delta_\alpha \beta = \alpha'_x \beta'_x + \alpha'_y \beta_y + \alpha'_z \beta'_z = \delta_\beta \alpha,$$

les équations (2), différentiées successivement par rapport à t, nous donneront les suivantes :

$$(5)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = u'_x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = u'_y, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = u'_z;$$

$$(6)\qquad \frac{d^3x}{dt^3} = \delta_f u'_x, \qquad \frac{d^3y}{dt^3} = \delta_f u'_y, \qquad \frac{d^3z}{dt^3} = \delta_f u'_z.$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit plane s'obtient, comme on sait, en égalant à zéro le déterminant

$$(7)\qquad \Omega = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} & \frac{dz}{dt} \\ \frac{d^2x}{dt^2} & \frac{d^2y}{dt^2} & \frac{d^2z}{dt^2} \\ \frac{d^3x}{dt^3} & \frac{d^3y}{dt^3} & \frac{d^3z}{dt^3} \end{vmatrix};$$

on voit donc que la condition pour que la famille de surfaces admette des trajectoires planes se présentera sous la forme

$$(8)\qquad \Omega = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ u'_x & u'_y & u'_z \\ \delta_f u'_x & \delta_f u'_y & \delta_f u'_z \end{vmatrix} = 0,$$

obtenue en remplaçant dans l'expression (7) les dérivées relatives à t, par leurs valeurs déduites des équations (2), (5), (6). On se trouve ainsi conduit à l'équation aux dérivées partielles du troisième ordre qui caractérise les surfaces cherchées et qui a servi de point de départ à M. Carrus.

Ce jeune géomètre en a fait connaître des transformations inté-

ressantes. Nous allons les retrouver, en donner de nouvelles, et surtout montrer que l'équation du troisième ordre peut être intégrée une fois au moins et ramenée à une équation aux dérivées partielles du second ordre seulement.

2. A cet effet, considérons une famille quelconque de surfaces, définie par l'équation (1), et proposons-nous de déterminer, pour un point quelconque de l'espace, de coordonnées x, y, z, le plan osculateur de celle des trajectoires orthogonales des surfaces qui passe en ce point. Si l'on écrit l'équation de ce plan osculateur sous la forme

$$lX + mY + nZ = 1,$$

on aura les conditions

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} &lx + my + nz = 1,\\ &l\frac{dx}{dt} + m\frac{dy}{dt} + n\frac{dz}{dt} = 0,\\ &l\frac{d^2x}{dt^2} + m\frac{d^2y}{dt^2} + n\frac{d^2z}{dt^2} = 0,\end{aligned}\right.$$

qui détermineront l, m, n et donneront les valeurs

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} l &= \frac{\dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2z}{dt^2} - \dfrac{dz}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2}}{D} = \frac{f'_y u'_z - f'_z u'_y}{D},\\ m &= \frac{\dfrac{dz}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2z}{dt^2}}{D} = \frac{f'_z u'_x - f'_x u'_z}{D},\\ n &= \frac{\dfrac{dx}{dt}\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{d^2x}{dt^2}}{D} = \frac{f'_x u'_y - f'_y u'_x}{D},\end{aligned}\right.$$

D ayant l'une ou l'autre des expressions suivantes :

$$(11)\quad D = \begin{vmatrix} x & y & z\\ \dfrac{dx}{dt} & \dfrac{dy}{dt} & \dfrac{dz}{dt}\\ \dfrac{d^2x}{dt^2} & \dfrac{d^2y}{dt^2} & \dfrac{d^2z}{dt^2}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z\\ f'_x & f'_y & f'_z\\ u'_x & u'_y & u'_z\end{vmatrix}.$$

Cela posé, si les trajectoires orthogonales doivent être planes, il faudra que l, m, n demeurent les mêmes en tous les points

d'une même trajectoire, c'est-à-dire satisfassent aux équations

$$(12)\qquad \frac{dl}{dt}=0,\qquad \frac{dm}{dt}=0,\qquad \frac{dn}{dt}=0,$$

ou, si l'on suppose l, m, n exprimées en fonction de x, y, z, aux trois suivantes :

$$(13)\qquad \delta_f l=0,\qquad \delta_f m=0,\qquad \delta_f n=0.$$

Voilà donc trois formes différentes de l'équation (8) obtenue plus haut. On en déduit évidemment les suivantes :

$$(14)\qquad \delta_f\left(\frac{l}{m}\right)=0,\qquad \delta_f\left(\frac{m}{n}\right)=0,\qquad \delta_f\left(\frac{n}{l}\right)=0,$$

qui sont celles obtenues par M. Carrus.

On établira aisément la relation qui existe entre l'équation (8) et ses formes nouvelles (13) à l'aide des identités qui donnent les valeurs de $\frac{dl}{dt}$, $\frac{dm}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$. En différentiant, en effet, les équations (9) par rapport à t, on obtiendra les relations

$$\begin{aligned}
&\frac{dl}{dt}x+\frac{dm}{dt}y+\frac{dn}{dt}z=0,\\
&\frac{dl}{dt}f_x+\frac{dm}{dt}f'_y+\frac{dn}{dt}f'_z=0,\\
&\frac{dl}{dt}u'_x+\frac{dm}{dt}u'_y+\frac{dn}{dt}u'_z=-l\,\delta_f u'_x-m\,\delta_f u'_y-n\,\delta_f u'_z;
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, après substitution à l, m, n de leurs valeurs, les expressions suivantes des dérivées cherchées :

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial l}{\partial t}&=\delta_f l=\frac{zf'_y-yf'_z}{D^2}\,\Omega,\\
\frac{\partial m}{\partial t}&=\delta_f m=\frac{xf'_z-zf'_x}{D^2}\,\Omega,\\
\frac{\partial n}{\partial t}&=\delta_f n=\frac{yf'_x-xf'_y}{D^2}\,\Omega.
\end{aligned}\right.$$

Ces expressions mettent bien en évidence les relations annoncées plus haut.

3. Voyons maintenant comment on pourra intégrer une fois l'équation du troisième ordre.

Nous nous appuierons sur la remarque suivante : si l'on considère une famille de surfaces (F), les plans osculateurs de leurs trajectoires forment en général un système triplement infini, puisqu'il y en a un qui correspond à chaque point de l'espace. Mais si les trajectoires orthogonales des surfaces (F) sont planes, les plans de ces courbes ne peuvent former qu'un système simplement ou doublement infini, puisqu'ils demeurent invariables lorsqu'on se déplace sur la ou sur les trajectoires orthogonales qu'ils contiennent. Supposons d'abord qu'ils forment une suite simplement infinie, c'est-à-dire qu'ils enveloppent une développable (Δ). Comme les trajectoires orthogonales elles-mêmes forment un système doublement infini, il faudra que chaque plan tangent de Δ contienne non pas une, mais une infinité de trajectoires, formant une famille de courbes (T) dans ce plan. Les surfaces (F) elles-mêmes devront couper ce plan *normalement* et suivant une des courbes (U) qui rencontrent à angle droit toutes les courbes (T). On voit ainsi que les surfaces (F) devront couper normalement chaque plan tangent de (Δ) et seront, par suite, des surfaces moulures engendrées par un profil plan invariable dont le plan roulera sans glisser sur la développable (Δ). Cette solution était évidente *a priori*.

Si nous l'écartons, nous voyons que les plans des trajectoires, formant une suite doublement infinie, doivent envelopper une surface non développable. Alors les quantités que nous avons appelées l, m, n devront satisfaire à une relation

$$\bar{\mathfrak{X}}(l, m, n) = 0, \tag{16}$$

qui deviendra une équation aux dérivées partielles du second ordre quand on y remplacera l, m, n par leurs expressions (10) en fonction de x, y, z. *C'est l'intégrale première générale de l'équation du troisième ordre* (8).

4. On peut vérifier ce résultat à l'aide des équations (15). Elles nous conduisent à l'identité

$$\delta_f \bar{\mathfrak{X}}(l, m, n) = \frac{\Omega}{\Pi^2} \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{\mathfrak{X}}}{\partial l} & \frac{\partial \bar{\mathfrak{X}}}{\partial m} & \frac{\partial \bar{\mathfrak{X}}}{\partial n} \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \tag{17}$$

dans laquelle le second membre contient Ω en facteur. Mais on interprétera mieux le résultat, et l'on caractérisera plus nettement les solutions de l'équation (16) qui, sans annuler Ω, annulent son coefficient dans le second membre de l'équation (17), en raisonnant comme il suit :

L'équation (16) est évidemment équivalente à la suivante :

$$(18) \qquad \theta = \begin{vmatrix} l'_x & l'_y & l'_z \\ m'_x & m'_y & m'_z \\ n'_x & n'_y & n'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on multiplie ce déterminant par le déterminant D et si l'on tient compte à la fois des équations (9) et de leurs dérivées, on trouve

$$\theta D = - \begin{vmatrix} l & m & n \\ lf''_{x^2} + mf''_{xy} + nf''_{xz} & lf''_{xy} + mf''_{y^2} + nf''_{yz} & lf''_{xz} + mf''_{yz} + nf''_{z^2} \\ lu''_{y^2} + mu''_{xy} + nu''_{xz} & lu''_{xy} + mu''_{y^2} + nu''_{yz} & lu''_{xz} + mu''_{yz} + nu''_{z^2} \end{vmatrix}.$$

Une nouvelle multiplication par D nous donnera, en tenant compte des équations (9) et (10),

$$(19) \qquad \theta D^2 = \Omega\Omega',$$

Ω' ayant pour expression

$$(20) \qquad \Omega' = \begin{vmatrix} f'_x & f'_y & f' \\ u'_x & u'_y & u \\ \delta_u f'_x & \delta_u f'_y & \delta_u f'_z \end{vmatrix}.$$

Nous connaissons l'interprétation géométrique de l'équation du troisième ordre que l'on obtient en égalant Ω à zéro; elle exprime que les trajectoires orthogonales de la famille des surfaces (F) sont planes. Il reste à trouver la signification et l'interprétation de l'équation du second ordre seulement que l'on obtient en égalant à zéro le second facteur Ω'. On y parvient immédiatement par les considérations géométriques suivantes.

5. L'équation (18) exprime évidemment que l, m, n sont liées par une relation, c'est-à-dire que les plans osculateurs des trajectoires des surfaces (F) sont tangents à une surface (S) qui, au moins dans le cas général, n'est pas développable. Considérons

une quelconque des trajectoires (T) et un point M sur cette trajectoire. Passons du point M au point infiniment voisin M′ de la même trajectoire. On ne pourra faire que les deux hypothèses suivantes :

1° Ou bien les plans osculateurs en M et en M′ ne seront pas distincts, et alors les trajectoires (T) seront planes. Nous savons que, dans ce cas, c'est le facteur Ω de θ qui s'annulera.

2° Ou bien les plans seront généralement distincts, et alors les deux plans osculateurs en M et en M′ se couperont suivant la tangente en M à la trajectoire (T), c'est-à-dire suivant la normale en M à celle des surfaces (F) qui passe en ce point. Mais cette normale, étant l'intersection des deux plans osculateurs, c'est-à-dire de deux plans tangents infiniment voisins à la surface (S), sera, par cela même, tangente à cette surface.

Ainsi, l'*équation du second ordre*

$$\Omega' = 0 \tag{21}$$

définit toutes les familles de surfaces dont les normales sont tangentes à une surface déterminée (S).

6. Il ne sera pas inutile de vérifier ce résultat par l'Analyse. On y parvient à l'aide du lemme suivant, que nous empruntons à la théorie des complexes rectilignes.

Étant définie une droite par les trois équations de ses projections

$$\left\{\begin{aligned} bz - cy + a' &= 0, \\ cx - az + b' &= 0, \\ ay - bx + c' &= 0, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

où les six coordonnées a, b, c, a', b', c', au sens de Plücker, sont des fonctions de trois variables indépendantes, la condition nécessaire et suffisante pour que cette droite demeure tangente à une surface déterminée est que la forme quadratique

$$da\,da' + db\,db' + dc\,dc' = 0 \tag{23}$$

se décompose en deux facteurs linéaires.

Appliquons cette condition au complexe engendré par les nor-

males à la famille de surfaces (F). On aura ici

$$a = f'_x, \qquad b = f'_y, \qquad c = f'_z;$$
$$a' = yf'_z - zf'_y, \qquad b' = zf'_x - xf'_z, \qquad c' = xf'_y - yf'_x;$$

et la condition (23) prendra la forme

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} dx & f'_x & df'_x \\ dy & f'_y & df'_y \\ dz & f'_z & df'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Il faudra exprimer que cette expression homogène et du second degré en dx, dy, dz se décompose en deux facteurs linéaires et l'on devra retrouver ainsi l'équation (20).

Avant de faire cette vérification, nous allons donner l'interprétation géométrique de l'équation (24). Si l'on y considère x, y, z comme donnés et dx, dy, dz comme les variables, elle représente un cône du second degré. Or ce cône, que nous appellerons *cône de Malus*, du nom de celui qui l'a envisagé le premier, définit évidemment toutes les directions dans lesquelles il faut se déplacer pour que la normale à la surface (F) engendre un élément de surface développable [1].

Par conséquent, nous pouvons énoncer la condition donnée plus haut sous la forme suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que les normales à la famille de surfaces (F) *soient tangentes à une surface déterminée* (S) *est que le cône de Malus relatif à tout point de l'espace se décompose en deux plans.*

7. Il nous reste à montrer que cette condition est équivalente à l'équation (20).

Pour cela, nous choisirons des axes particuliers. En un point M de l'espace, nous prendrons pour axe des x la normale à la surface (F) qui y passe et pour axes des y et des z les directions principales de cette surface. Avec ces axes particuliers, on aura

$$f'_y = 0, \qquad f'_z = 0, \qquad f''_{yz} = 0,$$
$$u'_x = f'_x f''_{x^2}, \qquad u'_y = f'_x f''_{xy}, \qquad u'_z = f'_x f''_{xz},$$

---

[1] Voir *Leçons sur la théorie des surfaces*, 2e Partie, Livre IV, Chap. XII.

et l'on trouvera

$$\Omega' = f'^3_x \begin{vmatrix} f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{xy}(f''_{x^2} + f''_{y^2}) & f''_{xz}(f''_{x^2} + f''_{z^2}) \end{vmatrix}$$

ou encore

$$\Omega' = f'^3_x f''_{xy} f''_{xz} (f''_{z^2} - f''_{y^2}).$$

D'autre part, l'équation du cône de Malus devient ici

$$f'_x \begin{vmatrix} dy & f''_{yx}\,dx + f''_{y^2}\,dy \\ dz & f''_{zx}\,dx + f''_{z^2}\,dz \end{vmatrix} = 0.$$

En exprimant qu'il se décompose, on a la condition

$$f'^3_x f''_{xy} f''_{xz} (f''_{z^2} - f''_{y^2}) = 0,$$

dont le premier membre est identique à Ω'. Notre proposition est donc vérifiée.

Pour que Ω' soit nul, il faut, en laissant de côté le cas particulier où les surfaces (F) auraient des ombilics en tous leurs points et seraient, par suite, des sphères, que l'une ou l'autre des dérivées f''_{xy}, f''_{xz} soit nulle. Par raison de symétrie, on peut choisir arbitrairement. Faisons donc

$$f''_{xy} = 0,$$

alors le cône de Malus se décomposera dans les deux plans

$$dy = 0, \qquad f''_{zx}\,dx + (f''_{z^2} - f''_{y^2})\,dz = 0,$$

dont le premier est l'un des plans principaux de (F). C'est ce plan qui touchera la surface (S) enveloppe des normales; car le second plan, qui passe par la tangente principale normale au premier plan, ne contient pas la normale à la surface (F).

Au reste, cela est évident géométriquement; car si une droite est tangente en A à une surface (S), elle ne peut engendrer une développable que dans les deux cas suivants :

Ou bien elle se déplace dans sa propre direction et alors elle est tangente en A à l'arête de rebroussement de la développable qu'elle engendre;

Ou bien elle se déplace dans une direction différente, nécessairement conjuguée de la sienne, et alors la développable qu'elle

engendre a pour plan tangent suivant la droite le plan tangent en A à (S).

8. D'après l'interprétation que nous venons de donner pour l'équation du second ordre

$$\Omega' = 0,$$

il est aisé de voir qu'on peut l'intégrer dans tous les cas ou du moins ramener son intégration à celle d'une équation différentielle *ordinaire* du second ordre.

En effet, puisque les surfaces (F) ont leurs normales tangentes à une surface arbitraire, mais déterminée (S), il suffira, pour obtenir chaque surface (F), de tracer sur (S) une famille quelconque de lignes géodésiques dont les tangentes seront, comme on sait, normales à une famille de surfaces parallèles qui se détermineront par une simple quadrature. On prendra pour (F) une quelconque de ces surfaces parallèles, puis, en faisant varier la famille de lignes géodésiques choisie, on obtiendra sans difficulté la famille des surfaces (F). La solution complète du problème pourra donc être obtenue dès que l'on connaîtra les lignes géodésiques de (S).

Il nous semble qu'il y a là un exemple intéressant d'intégration complète pour une équation aux dérivées partielles du second ordre à trois variables indépendantes.

9. Nos efforts pour intégrer de même l'équation (16)

$$\mathfrak{F}(l, m, n) = 0$$

n'ont pu aboutir d'une manière générale. Mais nous signalerons quelques cas particuliers dans lesquels on peut, tout au moins, la ramener au premier ordre.

Si l'on veut que la surface enveloppée par les plans des trajectoires se réduise à un point, qu'on prendra pour origine des coordonnées, l'équation (16) se réduira à la forme simple

$$(25) \qquad D = \begin{vmatrix} x & y & z \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ u'_x & u'_y & u'_z \end{vmatrix} = 0.$$

Ici, on pourra évidemment intégrer une fois encore et remplacer l'équation précédente par la suivante :

$$(26) \qquad 2u = f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z = \varphi(f, x^2 + y^2 + z^2),$$

φ désignant une fonction arbitraire. Cette équation se rapproche beaucoup par la forme de celle que Jacobi a introduite en Mécanique analytique. On saura l'intégrer toutes les fois que le second membre ne contiendra pas f. Ainsi, toutes les fois qu'on assemblera les trajectoires d'un mobile relatives à une *même* loi de la force centrale et à une *même* valeur de la constante des forces vives, toutes celles de ces trajectoires, nécessairement planes, qui seront normales à une surface arbitraire seront, par cela même, normales à toute une famille de surfaces et donneront une solution du problème étudié dans cette Note.

Si l'on voulait que les plans des trajectoires fussent parallèles à une droite fixe, on serait de même conduit, en prenant cette droite pour axe des x, à l'équation du premier ordre

$$(29) \qquad f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z = \varphi(f, x),$$

à laquelle on pourra appliquer des considérations analogues.

Pour obtenir des applications particulières, on pourra consulter les *Leçons sur la théorie des surfaces*, 2e Partie, Livre V, Chap. VI et VII.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Riesz (Marcel). — *Acta mathematica*, 1882-1912. *Table générale des Tomes* 1 *à* 35. 1 vol. in-4° jésus, VII-179 pages. Uppsala et Stockholm, Almqvist et Wiksells; Paris, A. Hermann et Fils; 1913. — Cette Table est suivie des portraits de tous les Auteurs de Mémoires (p. 129-179).

Poletti (Luigi). — *Resultati teorico-pratici di una radicale modificazione del Crivello di Eratostene*. 1 vol. in-8 jésus, 47 pages. Parma, Luigi Battei, 1914.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MILHAUD (G). — Nouvelles Études sur l'histoire de la Pensée scientifique. 1 vol. in-8, IV-237 pages. Paris, Félix Alcan, 1911.

« L'Histoire n'a pas pour unique objet la satisfaction d'une vaine curiosité; c'est l'avenir que doit finalement éclairer l'étude du passé. » Ce mot profond de Paul Tannery s'applique assurément à toutes les branches des études historiques; mais il convient tout particulièrement à l'historien de la pensée scientifique; il définit nettement le but et le rôle de celui-ci, dont il fait le collaborateur du savant. Surprendre les conditions les plus favorables à l'éclosion et au développement des différentes branches de la Science, déterminer les causes de leur recul et de leur décadence, voilà le problème fondamental pour l'historien : or, comme le remarque Paul Tannery lui-même, ces questions sont aussi d'un intérêt capital pour le chercheur, pour le savant digne de ce nom « et qui se préoccupe du sort futur réservé à la Science à laquelle il s'est consacré ».

Tel est précisément le but poursuivi par M. G. Milhaud dans ses *Nouvelles Études sur l'histoire de la Pensée scientifique*. Son Ouvrage est composé de parties qui diffèrent à la fois par leurs origines, leurs dates, leurs sujets : ce sont des leçons inaugurales, des articles de revue, ou même des réimpressions (avec compléments) d'œuvres antérieures. Mais, malgré cette diversité, une impression d'unité se dégage nettement, en pleine harmonie avec l'idéal qui vient d'être assigné à l'historien. C'est ce qui ressortira pleinement de l'analyse de l'Ouvrage.

Les *Études* de M. G. Milhaud se divisent d'elles-mêmes en deux parties distinctes ; l'une, la plus importante, se rapporte aux travaux géométriques des Grecs; l'autre pivote autour de Descartes. Ce plan n'est pas pour nous surprendre : il cadre pleinement avec les beaux travaux de M. G. Milhaud sur l'antiquité et le XVIIe siècle. Les deux sujets précédents avaient fait aussi l'objet des savantes et profondes recherches de Paul Tannery : il est donc bien naturel que la première étude de M. G. Milhaud soit un pieux hommage à la mémoire de son maître.

Pour apprécier pleinement l'œuvre de Paul Tannery, il faut remonter en arrière, examiner ce qu'était devenue la philosophie officielle à la suite de Cousin : sorte de cathéchisme banal et sans originalité, elle n'accordait guère de place aux doctrines scientifiques, trop techniques ou subversives. L'histoire de la Philosophie, comme tout l'enseignement philosophique d'alors, était conçue dans cet esprit; c'est ainsi que les géomètres grecs n'étaient plus que des métaphysiciens discutant à perte de vue sur des entités insaisissables, telles que l'infini, le nombre, l'intelligence. Une réaction devait se produire; elle eut lieu, en effet, principalement sous l'influence des découvertes des naturalistes. L'histoire se fait alors évolutionniste; elle nous montre une science, embryonnaire chez les Chaldéens et les Égyptiens, se développant lentement au cours des siècles, s'infiltrant sur les rivages de l'Ionie et de la Grande Grèce, où sa carrière prend dès lors un rapide essor. Des Écoles se forment, deviennent bientôt prospères, telle la célèbre École d'Alexandrie. Rien ne paraît arrêter l'élan de la Science; et pourtant voilà la fin de l'Empire romain qui approche, des temps nouveaux qui commencent et brisent l'essor de la pensée scientifique; il fallait de longs siècles pour que le flambeau de la Science, pieusement gardé par les Arabes et transmis aux maîtres de la Renaissance, vienne enfin chasser les ténèbres et resplendir à tout jamais.

Or cette conception de l'histoire de la Science est complètement inexacte; et cependant elle faisait encore loi il y a une quarantaine d'années; des historiens comme Hankel l'exposaient alors comme un dogme. Vers 1880, de nouvelles tendances se manifestent; un jeune mathématicien, Paul Tannery, est attiré par le problème des origines de la pensée scientifique. Façonné au langage et au raisonnement géométriques, il entreprend l'étude des œuvres mathématiques des Anciens. C'est une vraie révélation pour le public scientifique d'alors : adieu les considérations vagues ou creuses sur les géomètres grecs; ce sont des hommes, des chercheurs semblables à ceux d'aujourd'hui que nous montre Paul Tannery dans des Articles substantiels et vivants. Leurs habitudes de travail, les chemins suivis par leur pensée nous paraissent contemporains, malgré leurs vingt-quatre siècles de recul. Les mêmes courants d'idées, les mêmes cadres se retrouvent alors et

aujourd'hui, et des principes qui nous sont familiers, comme ceux de permanence ou de causalité, sont déjà plus ou moins nettement exprimés. Ce développement presque inouï, la Science l'avait atteint d'un seul bond ; rien chez les Égyptiens ou les Orientaux, rien chez eux ne pouvait ressembler à une doctrine scientifique, et il était vraiment impossible de décorer de ce nom un recueil de procédés empiriques, d'observations faciles ou banales, dépourvus de lien et de portée générale. Ce qui manquait à ces nations si hiérarchisées, c'était le goût de la libre recherche, la curiosité de l'esprit, l'aptitude et l'attention nécessaires pour suivre un raisonnement abstrait. Or tout cela se trouve réuni chez les Grecs ; il y a donc là une discontinuité, un saut brusque incontestable. Du même coup, deux théories se trouvaient ébranlées : celle de Cousin qui ignorait l'importance scientifique des spéculations des Hellènes, et celle de Hankel qui établissait une progression continue, une filiation de l'Orient à la Grèce.

Telle était la conclusion de Paul Tannery dans sa première œuvre : *La Science hellène*. Nous nous y sommes arrêté d'autant plus volontiers qu'elle constitue, comme nous le verrons, le thème de la première partie de l'Ouvrage de M. G. Milhaud.

Après avoir montré toute l'importance de la thèse de Paul Tannery, l'Auteur arrive aux travaux ultérieurs du maître historien : d'abord à « *la Géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons* ». Dans ce Recueil d'articles publiés par le *Bulletin des Sciences mathématiques*, Paul Tannery affirme plus encore son érudition en résolvant un problème singulièrement ardu : celui de l'histoire de la Géométrie chez les Grecs. On sait la conclusion de Paul Tannery : le principal document qui puisse nous renseigner à ce sujet est le commentaire de Proclus sur Euclide ; or Proclus en a emprunté l'essentiel à Geminus ; observons alors que Proclus vivait au ve siècle après Jésus-Christ et Geminus au i^er^ siècle avant notre ère, et nous conclurons que déjà, depuis de longs siècles, la Géométrie ne faisait aucun progrès notable.

M. G. Milhaud aborde ensuite les travaux de Paul Tannery sur l'Astronomie des Anciens ; trois périodes se trouvent nettement distinguées : la période préscientifique, utilitaire et empirique ; la période rationnelle d'Eudoxe, et la période géométrique

d'Hipparque. Les recherches de Paul Tannery aboutissent à souder naturellement les travaux d'Hipparque à ceux des géomètres antérieurs, comme Apollonius ; en définitive, l'œuvre d'Hipparque, et *a fortiori* celle de Ptolémée, doivent être considérées comme une continuation, un prolongement et non comme une création. En résumé, les travaux de Paul Tannery établissaient par une documentation rigoureuse que la Science fit son apparition chez les Grecs, qu'elle atteignit rapidement son apogée et qu'elle commença à décliner bien avant l'établissement de l'Empire romain.

Enfin, M. G. Milhaud termine son étude sur Paul Tannery par quelques détails sur les nombreuses publications d'un érudit, pour lequel aucune période n'avait de secret, et il rappelle des souvenirs personnels qui jettent un voile de mélancolie sur la physionomie d'un penseur original, d'un maître incontestable, d'un savant désintéressé mais trop modeste !

Je laisserai de côté, pour l'instant, la seconde étude de M. G. Milhaud, quitte à y revenir à la fin, et j'aborderai immédiatement l'un des plus importants Chapitres de l'Ouvrage : « Les origines des Sciences mathématiques dans les civilisations orientale et égyptienne : l'apport de l'Orient dans la Science grecque. » C'est une reproduction partielle des brillantes *Leçons sur les origines de la Science grecque*, reproduction modifiée pourtant par quelques travaux plus récents sur la Science hindoue. Nous savons déjà quelle sera la thèse de M. G. Milhaud : la Science pure est d'origine grecque ; pour le prouver et réfuter du même coup les théories chères aux encyclopédistes, à Bailly, à Hankel, l'Auteur passera en revue successivement l'Arithmétique et la Géométrie, l'Architecture et l'Astronomie.

Tout d'abord, à quoi se réduit la science arithmétique des Orientaux et des Égyptiens ? A des procédés plus ou moins adroits pour faciliter la numération écrite (décimale ou sexagésimale) ; le calcul des fractions est très compliqué ; les problèmes sont énoncés d'une façon lourde ou naïve : rien d'instructif à cet égard comme les exemples judicieusement choisis par M. G. Milhaud [1]. La théorie des nombres est inexistante ; et, si, l'on a trouvé quelques

---

[1] *Voir* pages 53-63 ; M. G. Milhaud se sert beaucoup d'un travail de M. Rodet (*Bull. Soc. math.*, t. VI).

Tables de carrés ou de cubes, leur utilité pratique évidente suffit à expliquer le but de leurs Auteurs.

Arrivons à la Géométrie et constatons, qu'ici encore, le bagage scientifique des Orientaux et des Égyptiens est bien sommaire; il se résume en quelques mots : idée de la similitude, approximation empirique de π, usage du triangle rectangle 3, 4, 5 et division du cercle en six parties égales. Il semble bien d'ailleurs que les Chaldéens n'ont pu démontrer la propriété caractéristique du côté de l'hexagone régulier inscrit. Le cas du triangle rectangle 3, 4, 5 est plus embarrassant; nous y reviendrons tout à l'heure.

Abordons maintenant l'Architecture, qui semble poussée très loin chez les Orientaux et les Égyptiens; l'argumentation de M. G. Milhaud est ici sans réplique : les sentiments et les goûts artistiques de l'homme sont aussi anciens que l'humanité; quant à la construction d'un édifice, elle ne pouvait réclamer des Anciens aucune connaissance scientifique sérieuse. Pour s'en convaincre, il suffit de lire le Traité de Vitruve, bien postérieur pourtant aux architectes chaldéens et égyptiens : « un apprenti maçon, sans savoir lire et écrire », réaliserait pleinement les *desiderata* de l'architecte romain. En outre, à ces époques lointaines, les devis ne sont guère nécessaires; la Géométrie et le Calcul n'ont donc pas besoin d'une grande perfection, et d'ailleurs on commet des erreurs grossières au sujet du volume de la pyramide. Enfin, la Mécanique rationnelle est tout aussi inutile que la Mécanique expérimentale pour des populations qui remplacent les instruments et les machines par une main-d'œuvre gratuite et abondante.

Le témoignage de l'Astronomie modifiera-t-il notre impression? Ici encore, la réponse restera pleinement d'accord avec la thèse de Paul Tannery. De tout temps, l'homme a senti le besoin de s'orienter, de régler les différents moments de la journée et les événements importants de la vie. Des contrées aussi favorisées sous le rapport des conditions climatériques constituaient un milieu éminemment propice aux observations astronomiques; c'était une constatation bien banale que la variation de l'ombre d'un gnomon suivant les heures et les saisons : du même coup, le problème de l'orientation des édifices était résolu. Que les monuments publics aient été érigés suivant telle ou telle orientation,

c'est évidemment pour des raisons étrangères à la Science. En tout cas, il n'y avait plus aucune difficulté à profiter de cette orientation, une fois réalisée, pour repérer les saisons; et, aujourd'hui encore, les Arabes remarquent le retour périodique du jour où le soleil se couche dans le prolongement de l'une des faces, boréale ou australe, de la grande pyramide. Dès lors, la mesure de l'année était facile, et même avec une assez grande précision. Quant aux éclipses et à la fameuse période de 223 lunaisons, l'intérêt des Orientaux à ce sujet s'explique aisément par des superstitions ou des considérations extra-scientifiques. Rien d'étonnant que les Chaldéens aient tenu un registre des observations d'éclipses, et qu'ils aient constaté leur retour à la seule inspection des dates : de là à une prédiction (souvent imprécise, ou même inexacte, quelquefois), le pas était facile. Il nous semble même inutile d'admettre, avec M. G. Milhaud, que les Chaldéens soient arrivés à ce résultat par la découverte du mouvement des nœuds de l'orbite lunaire.

Laissons de côté les autres sciences, et écartons l'hypothèse de documents perdus : les inscriptions cunéiformes et les hiéroglyphes sont très instructifs au sujet de la vie et des mœurs des Orientaux; il est bien peu probable qu'une découverte ultérieure modifie sérieusement notre opinion. Les témoignages très nets des Grecs et des Romains sont d'ailleurs peu flatteurs pour les aptitudes scientifiques des Égyptiens et des Chaldéens.

Telles étaient les conclusions de M. G. Milhaud dans ses *Leçons sur les Origines de la Science grecque*, parues en 1892. Depuis, un fait nouveau se produisit : l'étude approfondie des *Sulvasutras* d'Apastamba, entreprise successivement par Thibaut, Zeuthen, Heath, conduisit Bürk à d'intéressantes conclusions. Jusqu'alors on estimait que les Orientaux ne connaissaient qu'une seule solution de l'équation arithmétique

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

à savoir la solution (3, 4, 5) et les solutions semblables; voici qu'à une époque bien antérieure au VIIe siècle d'avant notre ère, les Hindous possédaient au moins trois autres solutions :

$$(8, 15, 17), \qquad (12, 35, 37), \qquad (15, 36, 39).$$

Apastamba n'indique pas d'autre solution, mais il énonce explicitement le théorème du carré de l'hypoténuse; et il en donne une véritable démonstration, plus simple assurément que celle des Traités classiques longtemps en usage dans notre enseignement. Il y a mieux : il étudie le cas du triangle rectangle isoscèle et adopte pour $\sqrt{2}$ une valeur approchée $\frac{577}{408}$ très digne d'attention : c'est une des réduites du développement de l'irrationnelle précédente en fraction continue. Par quelle voie est-il arrivé à ce résultat? Mystère! N'exagérons rien d'ailleurs; Apastamba ne semble avoir aucune idée de l'abîme qui sépare $\sqrt{2}$ de sa valeur approchée. Les mêmes remarques pourraient encore s'appliquer au problème de la quadrature du cercle qu'Apastamba s'imagine avoir résolu : entre l'esprit scientifique des Hindous et celui des Hellènes, il y a donc un fossé infranchissable.

En somme, les conclusions antérieures de M. G. Milhaud restent toujours valables; depuis l'étude des *Sulvasutras*, nous savons que les Hindous avaient réfléchi sur ce problème, si important pour eux au point de vue pratique : la construction d'un triangle rectangle. Nous pouvons croire aussi que l'élite était capable de résoudre certains problèmes amusants, certaines devinettes [1] comme en proposent les journaux illustrés; mais, en tout cas, et jusqu'à nouvel ordre, il serait tout à fait exagéré d'élever au rang de science l'ensemble de leurs connaissances.

Le Chapitre suivant des *Études* de M. G. Milhaud se rapporte au *Traité de la Méthode* d'Archimède; découvert et publié en 1907 par M. Heiberg, de Copenhague, le texte était bientôt traduit en français par M. Th. Reinach et commenté savamment par M. Painlevé. On sait l'objet du travail d'Archimède : c'est une lettre à Eratosthène où le géomètre de Syracuse obtient l'aire d'un segment parabolique par d'élégantes considérations empruntées à la théorie des centres de gravité. Cette méthode, Archimède se plaît à la regarder comme susceptible d'une portée presque indéfinie, encore que, dans le cas actuel, il ne la considère pas comme très correctement appliquée. D'où vient ce scrupule? M. G. Milhaud l'explique par l'intervention de la Mécanique

---

[1] *Voir*, notamment, les exemples donnés par M. Milhaud, p. 117-123.

dans un problème de Géométrie : on sait que les *Éléments* d'Euclide excluent avec le plus grand soin la notion de mouvement des raisonnements géométriques. Mais si les fondateurs de la Géométrie faisaient montre d'un exclusivisme aussi absolu, est-ce une raison pour attribuer les mêmes préoccupations à Archimède? Aucun argument tiré de l'œuvre d'Archimède n'autorise M. G. Milhaud à l'affirmer en toute certitude. Il est donc permis de préférer plutôt l'explication si naturelle de M. Painlevé; cette explication se fonde sur ce que certaines propriétés des centres de gravité utilisées par Archimède n'étaient pas complètement établies quand il rédigeait son *Traité*. Il nous semble d'autant plus difficile d'expliquer les scrupules d'Archimède par les habitudes intellectuelles de ses devanciers, que, précisément, dans le fragment en question, il se distingue de ses prédécesseurs par des facultés créatrices jusqu'alors sans égales; dans le maniement des infiniment petits, il fait preuve d'une maîtrise, d'une hardiesse qui le rapprochent singulièrement des mathémaciens du XVIIe siècle.

Cette comparaison nous conduit tout naturellement à la seconde partie des *Études* de M. G. Milhaud; consacrée à Descartes, elle l'étudie successivement comme géomètre, physicien, mécanicien, pour le comparer enfin à Newton.

La renommée scientifique de Descartes, après avoir brillé d'un éclat incontesté, semble actuellement un peu éclipsée : cette constatation se retrouve à tout instant dans les *Études* de M. G. Milhaud. Et voici comment on pourrait caractériser son attitude envers Descartes : la critique, après avoir exalté Descartes, à l'égal d'un créateur, le rabaisse au niveau d'un plagiaire. Or, d'après M. G. Milhaud, si le premier point de vue est quelque peu exagéré, le second est insoutenable, car Descartes, pas plus que ses contemporains (ceux-là même dont on fait ses victimes), ne faisait que poursuivre des idées en germe dans les travaux de ses prédécesseurs.

Ainsi, considérons d'abord la Géométrie analytique; l'étude des œuvres de Fermat montre sans conteste que, antérieurement à la publication de la *Géométrie* de Descartes, le géomètre de Toulouse était en possession de la méthode de représentation analytique dont nous attribuons couramment la paternité à Des-

cartes. Et, pourtant, comment se fait-il qu'aucun débat de priorité n'ait été soulevé à ce sujet? Voici l'explication de M. G. Milhaud : Descartes, pas plus que Fermat, n'était réellement novateur en cette matière, car tous deux ne faisaient que suivre un procédé familier aux Anciens dans l'étude des coniques. Dès lors, rien d'étonnant à ce que Descartes, parlant de sa *Géométrie*, n'insiste guère sur la méthode de représentation qu'elle contient, mais bien plus souvent sur les résultats, sur les problèmes très particuliers qu'elle lui a permis de résoudre.

Il ne nous paraît pas, pourtant, que ce point de vue soit absolument exempt de critique; assurément, les Anciens se sont servis de coordonnées (la notion de coordonnées n'est-elle pas, d'ailleurs, toute intuitive, et son usage n'est-il pas instinctif chez les esprits les moins cultivés?). Mais les cas traités par les Anciens étaient d'une nature très spéciale; il ne s'agissait pour eux que de caractériser par des relations métriques les coniques ou quelques courbes simples. Et il ne pouvait en être autrement, car les seuls mots de Géométrie analytique entraînent un rapprochement entre l'espace et les nombres. Or, le calcul algébrique était trop lourd, trop compliqué, chez les Anciens pour aboutir à des résultats généraux; il fallait les patients efforts des algébristes de la Renaissance, de Viète en particulier, pour que les notations et les règles se simplifient, pour que l'étude des équations de degré supérieur conduise progressivement à la notion de fonction implicite. Dès lors, toutes les conditions favorables à l'éclosion de la Géométrie analytique étaient réunies; « l'idée était dans l'air ». Et ce qui devrait plutôt nous étonner, c'est que Descartes n'ait rien publié à ce sujet, tant il devait y être porté par le tour de son esprit, par la nature même de sa Méthode philosophique, essentiellement analytique. Enfin, le succès de sa philosophie devait contribuer à la propagation de sa géométrie; à supposer même qu'il n'ait pas aperçu toute la portée de sa méthode représentative, il resterait le propagandiste, le missionnaire, conscient ou non, d'une « découverte fondamentale qui a changé la face de la science mathématique ».

Comme physicien, Descartes a été très discuté; cette fois, les arguments de M. G. Milhaud nous semblent bien irréfutables. On sait l'importance de la loi des sinus : c'est le fondement de

l'Optique géométrique. Or les ennemis de Descartes, et surtout les Allemands, depuis Leibniz jusqu'à Poggendorf, attribuent cette loi au Hollandais Snellius. Descartes aurait eu connaissance de ses travaux et en aurait publié l'essentiel sous son propre nom. Assurément, si Descartes met l'évidence à la base de sa Méthode, les applications qu'il en fait lui-même sont quelquefois bien peu correctes; les expériences qu'il imagine dans le cas actuel semblent faites après coup, et sont, en tout cas, peu précises. Les raisons qu'il invoque pour établir « sa » loi sont vraiment peu sérieuses; ses comparaisons mécaniques sont puériles, et le point de départ de Fermat, fondé sur des considérations de minimum, nous paraît autrement profond. Faudra-t-il donc conclure de tout cela à une accusation de plagiat? Nullement. Les travaux de Kramer, la correspondance de Golius et de Constantin Huygens, publiée en 1896 par M. Korteweg, mettent péremptoirement Descartes hors de cause. Observons d'ailleurs que les tentatives de démonstration logique de Descartes étaient vouées à un échec inévitable, car un principe de physique ne se démontre pas, il se légitime par ses conséquences; quant à l'étude expérimentale des lois de la réfraction, elle était à l'ordre du jour depuis Kepler, suivant la remarque de M. G. Milhaud : nous pourrions même ajouter, depuis l'antiquité, puisque Archimède s'en est occupé et que Ptolémée a dressé des Tables de réfraction.

S'il fallait une nouvelle preuve du génie de Descartes, on pourrait la trouver dans son aptitude à discuter tous les grands problèmes abordés à son époque. A cet égard, ses théories sur la Mécanique sont très suggestives. Sans doute, Descartes interprète inexactement les résultats de l'expérience quand il énonce le principe de la conservation de la quantité de mouvement; il n'en reste pas moins acquis que, selon lui, les fondements de la Mécanique ne peuvent être établis avec les seules ressources de la raison, et qu'une fois ces premiers principes admis, toute la Mécanique doit pouvoir en être déduite; quant à ces principes, on doit pouvoir les énoncer en exprimant que certaines fonctions de l'état mécanique du système restent constantes. Que Descartes ait mal choisi la fonction, c'est indéniable; mais, comme le remarque M. G. Milhaud, il n'en est pas moins vrai que, sous ce rapport, Descartes s'est trouvé infiniment plus près que Newton de notre conception de l'énergie.

Et, d'ailleurs, n'était-on pas alors dans une science en pleine voie de formation, parsemée d'écueils de toute nature? Faut-il rappeler les difficultés de toute espèce rencontrées par les Copernic et les Galilée? A cet égard, il suffit de lire l'exposé pénétrant et d'une magnifique clarté que l'on doit à M. P. Painlevé ([1]). Les énoncés exacts des principes de la Dynamique étaient d'apparence si paradoxale que les fondateurs de la Mécanique devaient presque se faire violence à eux-mêmes pour les formuler correctement. La Mécanique, à peine née, se heurtait à des discussions inextricables sur la force, l'énergie, la force vive, la quantité de mouvement. Ce n'est qu'à la longue que toutes ces difficultés purent être vaincues, alors que l'Analyse était constituée sur des bases solides, et que l'application de ses théorèmes à la Mécanique et l'interprétation des conséquences qui en résultaient permettaient de réfléchir avec plus de maturité et de profondeur sur les préceptes. Tout en admettant, avec M. G. Milhaud, qu'il y ait un lien indissoluble entre la mécanique de Leibniz et sa philosophie, il n'en reste pas moins indubitable que Leibniz a eu sur le développement de la Mécanique une influence bien plus grande comme analyste que comme métaphysicien; et la même remarque peut se répéter pour Newton. Tenons compte maintenant de l'état de l'Analyse à l'époque de Descartes, et nous pourrons, sans crainte, lui rendre toute la justice qui lui est due.

L'Ouvrage de M. G. Milhaud se termine par un parallèle entre Descartes et Newton. Le tableau est très étudié; dans ses grandes lignes, comme dans ses détails, il doit beaucoup au beau Livre de M. Léon Bloch « sur la philosophie de Newton », ainsi que nous l'apprend M. G. Milhaud lui-même. Tout serait à citer de cette étude pénétrante; je me bornerai à résumer la conclusion qui, loin d'opposer Newton et Descartes, loin d'élever l'un au détriment de l'autre, nous les dépeint comme les artisans, certes bien différents sous tous les rapports, mais dont les œuvres se complètent mutuellement en « représentant deux aspects différents de l'esprit scientifique ».

Je n'ai pas encore parlé de l'une des *Études* de M. G. Milhaud :

([1]) *De la Méthode dans les sciences* (*Coll. Ém. Borel*, 2e édition, Paris 1910, p. 73-119).

celle qui a trait au rôle de la pensée mathématique dans l'histoire des idées; elle forme la conclusion toute naturelle de l'Ouvrage. Nous venons de rencontrer des exemples de l'attraction irrésistible qu'ont exercée les Mathématiques sur des cerveaux de génie. Chez l'élite cultivée de toutes les époques, les Mathématiques ont toujours joui d'un incomparable prestige, souvent voisin du sortilège. D'où vient ce « charme sur les intelligences »? A trois raisons principales, suivant M. G. Milhaud. Tout d'abord, les Mathématiques donnent le premier et le plus significatif exemple du pouvoir créateur de la raison. L'esprit est envahi par l'attirance des horizons qui s'ouvrent devant lui; et, même, à supposer que les propositions mathématiques soient dépourvues de tout contenu objectif, hypothèse presque abandonnée aujourd'hui, le prodige n'en serait que plus grand encore. D'ailleurs, et c'est la seconde raison de M. G. Milhaud, il arrive toujours un moment où, si abstraite que soit une théorie, elle trouve une application pratique importante : tel est le cas de la théorie des coniques, fondée par les Grecs, et qui, à plusieurs siècles de distance, recevait le plus splendide des couronnements dans les découvertes de Copernic et de Newton. Il y a donc là une emprise lointaine de la raison sur la réalité objective, une « anticipation de la connaissance » qui tient du miracle et contraint à une muette admiration.

Enfin, et c'est la dernière raison de M. G. Milhaud, la plus profonde aussi, les résultats obtenus par les géomètres ont eu pour conséquence de donner à l'homme une confiance presque illimitée dans la puissance de la raison, dans la possibilité d'un progrès indéfini. Et pourtant cette explication n'est pas adéquate à l'opinion généralement répandue : on se plaît habituellement à soutenir que ce sont exclusivement les sciences expérimentales qui ont libéré l'esprit de tous les jougs qu'il subissait, de tous les obstacles qui l'entravaient. Un peu d'attention suffit à montrer qu'il n'en est rien : dans le domaine des sciences de la nature, les Orientaux, les Égyptiens et, plus tard, les Alchimistes ont réalisé d'innombrables expériences. Pourtant, ils n'ont pas fait de la Science; aucun de leurs résultats ne permet de *prédire* avec certitude. Il fallait pour cela un germe nouveau, et ce germe ne pouvait provenir que du goût de la recherche désintéressée, de l'ardente curiosité de savoir; et c'est ainsi qu'apparaît la Science chez les Héllènes.

Ce qui est bien significatif, c'est que, dès sa naissance, elle revêt une forme géométrique. D'ailleurs, une fois en possession d'un ensemble de résultats aussi imposant, ensemble dû à la libre activité de son esprit, le savant était amené de lui-même à attaquer sans répit des problèmes d'une complexité croissante, mais où la Géométrie servait toujours de point d'appui : car, selon la belle parole de Galilée, les Mathématiques sont vraiment pareilles à des « ailes sans lesquelles il est impossible de s'élever à un pied au-dessus de terre ». Aussi bien, n'est-il pas vrai que ce sont les Mathématiques qui ont servi d'initiatrices à Descartes, Pascal ou Leibniz? Et plus près de nous, d'éminents philosophes ou naturalistes n'ont-ils pas été formés au creuset de l'Analyse et de la Géométrie?

Une telle conclusion ne pouvait surprendre de la part du mathématicien avisé qu'est M. G. Milhaud. Elle nous semble répondre pleinement à la parole de Paul Tannery que nous rappelions au début de cet article : toutes les fois que la Science sera cultivée pour elle-même, fût-ce dans ses parties les plus abstraites, les plus éloignées du monde réel, il y aura progrès; toutes les fois qu'un autre but, si noble et si élevé qu'il paraisse, parviendra à prépondérer, il y aura lieu de craindre la décadence; et c'est vraiment le cas de répéter avec H. Poincaré, que la recherche désintéressée de la vérité est le seul but vraiment digne de l'activité humaine.

René Garnier.

ZORETTI (L.). — Exercices numériques et graphiques de Mathématiques sur les leçons de Mathématiques générales. 1 vol. in-8 (23-14) de xv-125 pages, avec 39 figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

« S'il est une opinion qui a la bonne fortune de recueillir l'unanimité chez les personnes qui s'intéressent à l'enseignement supérieur, écrit M. L. Zoretti dans son Avant-Propos, c'est bien celle d'après laquelle les Cours de Mathématiques générales ne peuvent être utiles que s'ils sont accompagnés de nombreux exercices. » Aucun des élèves de ces Cours n'est destiné à devenir un mathématicien de profession, au moins avec l'organisation

actuelle de notre enseignement secondaire, et tant que dureront les privilèges de certaines écoles. Tous veulent poursuivre des études, en général relatives à des doctrines expérimentales, où les Mathématiques jouent un grand rôle comme outil. Ils commencent donc par venir s'initier au maniement de cet outil. Leurs professeurs doivent, en leur rendant les études aussi attrayantes que possible, leur faire acquérir les notions essentielles, leur expliquer en quoi consistent les méthodes générales, leur indiquer enfin quelques résultats et quelques formules, en précisant ceux de ces résultats qu'il est commode de savoir par cœur. Il faudra leur demander un effort de réflexion et d'assimilation. Les exercices devront concourir à ces résultats; ils seront à la fois éducatifs et pratiques; ils devront mettre l'étudiant en présence des difficultés qu'il rencontrera dans la pratique. L'Auteur a composé quelques énoncés où les données seront obtenues par l'élève lui-même en effectuant des mesures qui n'exigent pas un dispositif expérimental compliqué. L'élève verra ainsi comment se fait l'application des Mathématiques dans les cas de la pratique, à partir de quel moment celles-ci interviennent, comment se doivent interpréter d'une façon concrète les résultats fournis par les formules qu'il vient d'appliquer. Pour que les exercices soient pratiques, il faut qu'ils habituent l'élève à ces difficultés qu'un cours théorique ne soupçonne même pas. Il y a aussi les difficultés de pur calcul : calcul numérique, calcul algébrique, calcul au trait. Enfin viennent la question des approximations et celle des unités.

C'est dans cet esprit qu'est conçu le présent Recueil d'exercices. Il est fait pour l'étudiant qui travaille seul. L'Auteur s'est préoccupé, en le rédigeant, de résoudre quelques-unes des difficultés que rencontrera celui qui, sans maître, en abordera l'étude. Il a cherché à éviter les tâtonnements; si l'étudiant en rencontre encore, qu'il ne se décourage pas, qu'il réfléchisse, essaie de s'assimiler les parties du cours dont il n'aurait pas fait une étude suffisante; il pense que le temps qu'il passera à tâtonner ainsi est le moment le plus fructueux de son travail. Dans les premières séries, l'élève est entièrement guidé; rien n'est laissé à son initiative, données, méthodes, marche à suivre sont précisées. Au contraire, vers la fin, les appels à l'initiative deviennent de plus en plus fréquents, selon la méthode de l'enseignement supé-

rieur. Dans son Livre, M. L. Zoretti a appliqué des idées analogues à celles que M. Runge avait utilisées dans son Ouvrage intitulé *Graphical Methods*. ÉR. L.

PAPIN (D.). — NOUVELLE MANIÈRE POUR LEVER L'EAU PAR LA FORCE DU FEU, mise en lumière par M. D. Papin, Dr. en Méd., Prof. en Mathém. à Marbourg, conseiller de S. A. S. de Hesse et membre de la Société royale de Londres. 1 vol. petit in-8 carré, 64 pages et 1 planche. A Cassell, pour Jacob Estienne, libraire de la Cour, par Jean Gaspard Voguel, imprimeur, MDCCVII. Édition conforme à l'original, tirée à 250 exemplaires pour MM. A. Hermann et Fils, éditeurs à Paris, par MM. Barnéoud et Cie, à Laval, le 25 mai 1914.

MM. A. Hermann et Fils (1) ont eu la bonne idée de publier de ce petit Ouvrage très rare une édition qui est identique à celle de 1707.

C'est sur la demande de S. A. S. Charles, Landgrave de Hesse, que Denis Papin a entrepris des recherches pour construire une nouvelle machine destinée à élever l'eau par la force du feu. Dans une lettre, cet inventeur explique à Leibniz, en 1698, qu'il est arrivé à élever l'eau par la force du feu d'une manière plus avantageuse que celle qu'il avait publiée auparavant. En 1705, Leibniz demanda à Papin sa pensée au sujet de la machine de Thomas Savery pour élever l'eau par le feu. Cette machine était beaucoup plus défectueuse qu'on ne le pensait. Par une étude attentive de la machine de Savery et grâce à des idées ingénieuses, Papin est arrivé à donner à cette machine un tel degré de perfection que la nouvelle machine constituait un mode original et parfait pour élever l'eau par le feu.

Par les moyens que Papin indique, un homme pouvait alors

(1) MM. Hermann et Fils ont déjà publié par des procédés analogues d'autres Ouvrages plus ou moins rares dont voici les indications bibliographiques :

Ampère, Phénomènes électrodynamiques (1826).
Sadi Carnot, Réflexions sur la puissance motrice du feu (1824).
Descartes, Géométrie (1637).
Ganos, Recherches arithmétiques (1807).
Green, Mathematical papers (1871).
Lamé, Des méthodes en Géométrie (1818).
Legendre, Théorie des nombres (1830).
Lobatschewsky, Pangéométrie (1840).
— Recherches géométriques (1840).
Neper, Mirifici logarithmorum canonis descriptio (1618).

produire autant d'effet que cinquante hommes avec les anciennes machines et l'on pouvait arriver à augmenter l'effet de la machine de telle sorte qu'un homme fît plus de travail que mille. La machine de Papin pouvait « faire tourner quatre moulins dont chacun ferait autant d'effet que les moulins qui sont sur la Seine à Paris ».

Dans le Recueil des *Éloges académiques* de Joseph Bertrand, nouvelle série publiée par M. Gaston Darboux (Paris, Hachette et Cie, 1902), se trouvent une intéressante Notice sur *La Vie et les Ouvrages de Denis Papin* (p. 191) et un Article sur la *Correspondance de Denis Papin* (p. 211). On y verra combien ce grand inventeur fut malheureux. Après que son atelier eut été détruit par une explosion occasionnée par des expériences de chargement de canons avec de l'eau au lieu de poudre, il se démit de ses emplois à Cassell; puis il s'embarqua pour aller en Angleterre, le 24 septembre 1707, avec sa famille, sur un bateau à vapeur qu'il avait construit à force de sacrifices et de persévérance, et qu'il chauffait et dirigeait lui-même. Arrivée à Loch sur le Weser, sa machine fut brisée, transformée en vieille ferraille et vendue à la livre. Cette ruine ne l'abattit point. Il se rendit à Londres, près de la Société Royale, qui le chargea de l'*emploi honnête* de diriger les expériences décidées par elle. Là il vivait très misérablement. En 1714, il retourna à Cassell. A partir de cette date, on ne retrouve aucune trace de l'illustre vieillard.

Cet Ouvrage est d'un grand intérêt au point de vue de l'histoire de la Mécanique appliquée. EB. L.

ANNUAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES POUR L'AN 1915. 1 vol. in-16 (16-9) de VII-1004 pages, avec 78 figures et 5 cartes en 2 couleurs. Gauthier-Villars et Cie, Paris.

Conformément aux dispositions inaugurées en 1904, le présent *Annuaire* contient des Tableaux détaillés relatifs à la Géographie, à la Statistique, à la Métrologie, aux Monnaies et à la Météorologie. Mais il ne contient pas les données physiques et chimiques : elles se trouveront dans l'*Annuaire* de 1916. La partie astronomique du présent Volume renferme des Tableaux relatifs à la déviation de la verticale en France, à l'intensité de la pesanteur en divers lieux et au calcul des altitudes par les observations barométriques;

il contient aussi les données relatives aux constellations, aux parallaxes stellaires, aux étoiles doubles, aux mouvements propres des étoiles et à la spectroscopie stellaire, tandis qu'on a supprimé la sismologie, la théorie des cadrans solaires, la physique solaire et les données relatives aux petites planètes : ces matières seront développées en 1916.

Voici maintenant les principales modifications apportées cette année à la rédaction de l'*Annuaire*.

La *Partie astronomique* a été augmentée d'une Note de M. G. Bigourdan sur les *Constellations*. Cette Note, accompagnée de Cartes, contient l'énumération et la description des constellations, ainsi que la désignation et les coordonnées des principales étoiles qui les composent. M. de Grammont a bien voulu revoir et compléter sa Note sur la spectroscopie stellaire et sur le spectre de l'aurore boréale. La Note sur les comètes apparues en 1913 a été rédigée comme d'habitude par M. Schulhof.

La *Partie* consacrée à la *Géographie* a été augmentée d'une Note sur la profondeur des mers, due à M. Renaud, directeur d'Hydrographie.

Les Tableaux relatifs à la *Statistique* ont été remaniés et améliorés par les soins de MM. Rocques-Desvallées et Pottier.

M. A. Quiquet, secrétaire général de l'Institut des Actuaires français, a bien voulu revoir les Chapitres concernant les *Tables de survie et d'intérêt composé;* dans le premier de ces Chapitres, il a ajouté deux Tableaux donnant le taux annuel de mortalité et la valeur d'une annuité viagère, en correspondance avec les diverses Tables françaises présentement usitées ; dans le second, il a introduit un important complément en faisant figurer les taux de 0,5 pour 100 en 0,5 pour 100, depuis 0,5 jusqu'à 6 pour 100. En même temps, grâce à son dévouement et à son zèle, les Tables déjà existantes ont pu être amenées à un plus haut degré de correction.

La *Partie* relative aux *Monnaies* a été mise au courant, comme d'habitude, par M. Rocques-Desvallées.

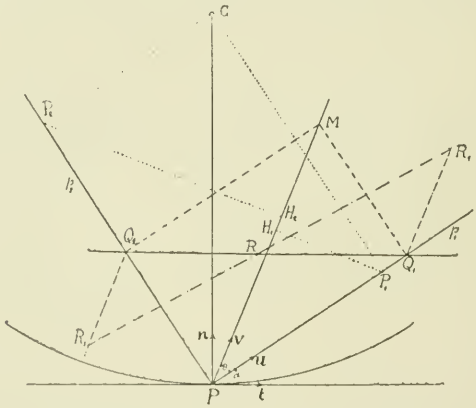
Le Volume se termine par une savante Notice scientifique rédigée par M. G. Bigourdan et intitulée : *Les méthodes d'examen des miroirs et des objectifs*. Er. L.

MÉLANGES.

SUR UNE ENVELOPPE DE DROITES;

PAR M. MATTEO BOTTASSO.

Par le point arbitraire P d'une courbe plane γ, menons une droite p_1 dont l'angle formé avec la tangente à γ en P ait une valeur constante α; et soit p_2 la normale à p_1 menée par P. Si nous désignons par C le centre de courbure de la courbe γ au point P, les pieds P_1 et P_2 des perpendiculaires, abaissées du point C sur les droites p_1 et p_2, décrivent les courbes enveloppées



par les systèmes de droites p_1 et p_2; en effet, ces courbes sont précisément celles envisagées par M. S. A. Toscano ([1]), correspondant aux angles α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$, de la courbe γ.

Si M est un point fixe du plan, les pieds Q_1 et Q_2 des perpendiculaires, abaissées de ce point sur les droites p_1 et p_2, décrivent les courbes podaires, par rapport au point M, des lignes engen-

([1]) S. A. TOSCANO, *Evolutoidi ed evolventoidi delle curve piane* (*Atti del R. Istit. Veneto*, t. LXXII, parte 2ª, 1914, p. 667-680).

drées par les points P_1 et P_2. Par conséquent, on sait que les normales à ces podaires, menées par les points Q_1 et Q_2, passent par les points milieux des segments MP_1 et MP_2.

Lorsque le point P se déplace sur la courbe γ, la droite Q_1Q_2 décrit un système simplement infini de droites, dépendant de la courbe γ, de l'angle α et du point M. Nous pouvons facilement déterminer l'*enveloppe* et les *trajectoires orthogonales* de ce système de droites par les méthodes du calcul vectoriel intrinsèque (¹), ainsi que nous allons l'exposer.

I.

Si H_1 *et* H_2 *sont les pieds des perpendiculaires abaissées des points* P_1 *et* P_2 *sur la droite* PM, *la droite des deux points* (²)

$$R_1 = Q_1 + (M - H_1), \qquad R_2 = Q_2 - (M - H_2)$$

coupe la droite Q_1Q_2 *dans le point* R *de l'enveloppe décrite par celle-ci.*

Voici comment on peut démontrer aisément cette construction, tout à fait simple, du point P.

Soit s la longueur de l'arc de la courbe γ au point P, à partir d'un point fixe O, sur γ; et, en ce même point P, soit $\frac{1}{\rho}$ la courbure, $\mathbf{t}$ et $\mathbf{n}$ deux vecteurs unitaires parallèles à la tangente et à la normale, de manière que (*Éléments*, p. 86 et 87)

$$(1) \qquad \mathbf{t} = \frac{d\mathrm{P}}{ds}, \qquad \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{n}.$$

De plus, si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont deux vecteurs unitaires parallèles aux droites p_1 et PM, $r(\geqq 0)$ est la distance du point M à P, θ est

---

(¹) *Voir* C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel*, etc. (Paris, A. Hermann, 1910). Cet Ouvrage sera indiqué, tout court, par *Éléments* dans la suite. On pourra même consulter : C. Burali-Forti, *Corso di Geometria Analitico-Proiettiva* (Torino, G. B. Petrini, 1912).

(²) Ainsi R_1, par exemple, est un point sur la parallèle à PM menée par Q_1 de manière que les deux segments Q_1R_1 et H_1M aient le même sens et la même longueur.

l'angle des droites p_1 et MP, on a

$$(2) \qquad \mathbf{u} = e^{i\alpha}\mathbf{t}, \qquad \mathbf{v} = e^{i\theta}\mathbf{u}, \qquad \mathrm{M} - \mathrm{P} = r\mathbf{v};$$

$$(3) \quad r\cos\theta = (\mathrm{M} - \mathrm{P}) \times \mathbf{u}, \qquad r\sin\theta = (\mathrm{M} - \mathrm{P}) \times i\mathbf{u}, \qquad \frac{d\mathbf{u}}{ds} = \frac{1}{\rho}\, i\mathbf{u};$$

où i et $e^{i\varphi}$ sont des opérateurs vectoriels, qui font tourner respectivement d'un angle droit, ou de φ *radians*, dans un sens déterminé, tout vecteur du plan de la courbe γ (*Éléments*, Chap. IV).

Si nous dérivons les relations (3) par rapport à s, puisque M est fixe et d'après les égalités (1) et (2), on déduit immédiatement

$$(4) \qquad (r\cos\theta)' = -\cos\alpha + \frac{r}{\rho}\sin\theta, \qquad (r\sin\theta)' = \sin\alpha - \frac{r}{\rho}\cos\theta.$$

Les points Q_1 et Q_2 sont donnés par

$$(5) \qquad \mathrm{Q}_1 = \mathrm{M} - r\sin\theta.i\mathbf{u}, \qquad \mathrm{Q}_2 = \mathrm{M} - r\cos\theta.\mathbf{u};$$

par suite, à l'aide des relations (3) et (4), on a

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathrm{Q}'_1 = \dfrac{r}{\rho}\sin\theta.\mathbf{u} - \left(\sin\alpha - \dfrac{r}{\rho}\cos\theta\right).i\mathbf{u}, \\ \mathrm{Q}'_2 = \left(\cos\alpha - \dfrac{r}{\rho}\sin\theta\right).\mathbf{u} - \dfrac{r}{\rho}\cos\theta.i\mathbf{u}; \end{cases}$$

d'où, en appliquant à ces vecteurs la rotation d'un angle droit,

$$(6') \qquad \begin{cases} i\mathrm{Q}'_1 = \left(\sin\alpha - \dfrac{r}{\rho}\cos\theta\right).\mathbf{u} + \dfrac{r}{\rho}\sin\theta.i\mathbf{u}, \\ i\mathrm{Q}'_2 = \dfrac{r}{\rho}\cos\theta.\mathbf{u} + \left(\cos\alpha - \dfrac{r}{\rho}\sin\theta\right).i\mathbf{u}. \end{cases}$$

On obtient tout point U de la droite $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ en faisant varier le nombre réel u (c'est-à-dire le rapport des distances du point Q_2 à U et à Q_1) dans l'expression

$$(7) \qquad \mathrm{U} = u\mathrm{Q}_1 + (1 - u)\mathrm{Q}_2.$$

On sait alors (*Éléments*, p. 98) que le point R de la courbe enveloppée par la droite variable $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ coïncide avec le point U (7), correspondant à la valeur de u qui satisfait à l'équation

$$(8) \qquad \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial s} \times i\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial u} = 0,$$

laquelle exprime le parallélisme des deux droites tangentes aux lignes décrites par le point U, lorsqu'on fait $s = \text{const.}$ et $u = \text{const.}$, c'est-à-dire le parallélisme des vecteurs $\frac{\partial U}{\partial s}$ et $\frac{\partial U}{\partial u}$.

De l'égalité (7) on tire

$$(9) \qquad \frac{\partial U}{\partial s} = u Q'_1 + (1-u) Q'_2, \qquad \frac{\partial U}{\partial u} = Q_1 - Q_2;$$

par suite, d'après les formules (5) et (6), l'équation (8) devient

$$\left\{ \left[u \sin\alpha + (1-2u)\frac{r}{\rho}\cos\theta \right] \mathbf{u} + \left[(1-u) r \cos\alpha - (1-2u)\frac{r}{\rho}\sin\theta \right] i\mathbf{u} \right\} \times r(\cos\theta\,\mathbf{u} - r\sin\theta . i\mathbf{u}) = 0,$$

c'est-à-dire, en multipliant par r et ρ, que (pour le point arbitraire de la courbe γ) nous supposons être des nombres finis et non nuls,

$$u(r - \rho\sin\alpha\cos\theta) - (1-u)(r - \rho\cos\alpha\sin\theta) = 0.$$

On en déduit que R est le barycentre des points Q_1 et Q_2, avec les masses $r - \rho\cos\alpha\sin\theta$, $r - \rho\sin\alpha\cos\theta$, c'est-à-dire

$$(10) \qquad R = \frac{(r - \rho\cos\alpha\sin\theta) Q_1 + (r - \rho\sin\alpha\cos\theta) Q_2}{2r - \rho\sin(\alpha+\theta)}.$$

D'autre part, on voit immédiatement que

$$(11) \qquad H_1 = P + \rho\sin\alpha\cos\theta\,\mathbf{v}, \qquad H_2 = P + \rho\cos\alpha\sin\theta\,\mathbf{v};$$

d'où, puisque $M = P + r\mathbf{v}$,

$$(12) \quad M - H_1 = (r - \rho\sin\alpha\cos\theta)\mathbf{v}, \qquad M - H_2 = (r - \rho\cos\alpha\sin\theta)\mathbf{v},$$

ou encore, d'après la définition des points R_1 et R_2,

$$(13) \quad R_1 = Q_1 + (r - \rho\sin\alpha\cos\theta)\mathbf{v}, \qquad R_2 = Q_2 - (r - \rho\cos\alpha\sin\theta)\mathbf{v}.$$

Par suite, en ayant égard à la construction, bien connue, du barycentre de deux points avec des masses données, on voit que R est situé sur la droite $R_1 R_2$. C. Q. F. D.

Remarque. — Lorsque $\alpha = 0$, on peut même trouver R de la manière suivante. Soit H le point de rencontre de la droite MQ_1

et de la perpendiculaire abaissée du point Q_2 sur la droite $Q_1 Q_2$, et soit $K = C + (M - H)$. On voit alors facilement que R est le point de rencontre des droites HK et $Q_1 Q_2$.

II.

L'équation différentielle des *trajectoires orthogonales* du système des droites $Q_1 Q_2$ est (*Éléments*, p. 100)

$$(14) \qquad dU \times \frac{\partial U}{\partial u} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 du + \frac{\partial U}{\partial s} \times \frac{\partial U}{\partial u}\, ds = 0,$$

où U désigne toujours le point arbitraire (7) de la droite $Q_1 Q_2$. Cette équation, d'après les formules (9), (5) et (6), nous donne

$$r^2\, du + [ur \sin\alpha \sin\theta + (1 - u) r \cos\alpha \cos\theta]\, ds = 0,$$

ou encore

$$(15) \qquad \frac{du}{ds} = \frac{\cos(\alpha + \theta)}{r}\, u - \cos\alpha \frac{\cos\theta}{r}.$$

Puisque le point M est fixe et d'après les égalités (1), on a

$$d(M - P) = -\mathbf{t}\, ds;$$

par conséquent, des relations (2), on a

$$-\int \frac{\cos(\alpha + \theta)}{r}\, ds = -\int \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{t}}{r}\, ds$$
$$= \int \frac{(M - P) \times d(M - P)}{r^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dr^2}{r^2} = \log r,$$

et le facteur intégrant de l'équation (15) est $e^{\log r} = r$. Par suite, de cette équation on tire

$$(16) \qquad u = \frac{1}{r}\left(v - \cos\alpha \int \cos\theta\, ds\right)$$

(où v est une constante arbitraire), car

$$\int \cos(\alpha + \theta)\, ds = -\int \frac{(M - P)\quad d(M - P)}{r} = -\int \frac{dr^2}{r} = -r^2 + \text{const.}$$

En remarquant qu'on a identiquement

$$\int \cos(\alpha + \theta)\, ds = \cos\alpha \int \cos\theta\, ds - \sin\alpha \int \sin\theta\, ds,$$

on peut encore donner à u la forme

$$u = \frac{1}{r}\left(v + r - \sin\alpha \int \sin\theta\, ds\right).$$

On pourra, d'après cela, construire sur la droite $Q_1 Q_2$ le point T_0 de la trajectoire orthogonale correspondante à $v = 0$, lorsqu'on sait calculer l'intégrale $\int \cos\theta\, ds$, ou bien lorsque α est zéro, ou il est un angle droit. Dans ces derniers cas, on a $u = 1$ ou $u = 0$, c'est-à-dire que le point T_0 coïncide respectivement avec Q_1 ou Q_2, comme il était aisé de le voir d'avance.

Les autres points T, correspondant à des valeurs arbitraires pour v, d'après les relations (7) et (16), sont donnés par

$$T = T_0 + \frac{v}{r}(Q_2 - Q_1).$$

III.

Soit q un bipoint variable, dans un plan fixe, en fonction d'un nombre s. On sait alors [1] que le point K de l'enveloppe de la droite q, c'est-à-dire l'intersection des bipoints q et q', est

$$R = \frac{qq'}{qq'.b}, \tag{17}$$

où $2b$ est le bivecteur unitaire du plan donné (de manière que $Ob = 1$, quel que soit le point O). Si nous posons $q = Q_1 Q_2$, d'où $q' = Q_1 Q'_2 - Q_2 Q'_1$, on en déduit immédiatement, d'après les propriétés fondamentales du produit alterné [*Éléments*, p. 185 et 186; p. 197 (19)],

$$qq' = Q_1 Q_2 Q'_2 . Q_1 - Q_1 Q_2 Q'_1 . Q_2.$$

---

[1] *Voir*, par exemple, C. Burali-Forti, *Introduction à la Géométrie différentielle* (Paris, Gauthier-Villars, 1897, p. 78).

Puisque (*Éléments*, p. 186)

$$2Q_1Q_2Q'_2 = (Q_2 - Q_1) \times iQ'_2, \qquad \ldots,$$

on voit ainsi que R est le barycentre des points Q_1 et Q_2 avec les masses $(Q_2 - Q_1) \times iQ'_2$ et $-(Q_2 - Q_1) \times iQ'_1$; et cela, d'après les formules du paragraphe I, permet de retrouver le résultat déjà obtenu dans le paragraphe I. Ce procédé général n'est pas plus compliqué que celui que nous avons exposé auparavant, sans être toutefois plus simple que celui-ci.

Nous pouvons même déduire, de cette manière, les *trajectoires orthogonales* des droites q. Le point arbitraire T de ces trajectoires est

$$(18) \qquad T = \frac{qq'}{qq'.b} - \left[\int \frac{qq'q''}{(qq'.b)^2} \operatorname{mod}(qb)\, ds + \text{const.}\right] \frac{qb}{\operatorname{mod}(qb)}.$$

En effet, si nous désignons par $\mathbf{w}$ le vecteur unitaire, parallèle à q, c'est-à-dire $\frac{qb}{\operatorname{mod}(qb)}$, on a $T = R + x\mathbf{w}$, où x est un nombre réel, et $T' \times \mathbf{w}$, c'est-à-dire

$$(R' + x'\mathbf{w} + x\mathbf{w}') \times \mathbf{w} = R' \times \mathbf{w} + x' = 0,$$

d'où

$$x = -\int R' \times \mathbf{w}\, ds + \text{const.}$$

Or, de la formule (17), on a [*Éléments*, p. 197 (19)]

$$R' = \frac{(qq'.b)qq'' - (qq''.b)qq'}{(qq'.b)^2} = \frac{(qq'.qq'')b}{(qq'.b)^2} = \frac{qq'.qq''}{(qq'.b)^2}\, qb,$$

d'où l'on tire la relation (18).

On pourrait appliquer cette formule générale (18) à la construction des trajectoires du paragraphe II, en posant $q = Q_1Q_2$, sans toutefois rencontrer des avantages, car on aurait, dans ce cas, plus de complication que dans le procédé suivi au paragraphe II.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MILHAUD (Georges) et POUGET (Édouard). — Cours de Géométrie analytique. Tome I : Géométrie a deux dimensions. 1 vol. gr. in-8. Alcan, 1914.

Le Programme de la classe de Mathématiques spéciales des Lycées, arrêté par la Commission interministérielle et mis en vigueur en 1904, comportait, entre autres choses, une réduction notable de la part jusqu'alors réservée à la Géométrie analytique. Les programmes antérieurs et surtout les habitudes des examens avaient développé outre mesure bon nombre de chapitres de la Géométrie analytique. Certains d'entre eux y étaient exposés jusqu'aux moindres détails; d'autres, dont les applications sont loin d'être immédiates, y avaient été introduits. Ce surcroît de matière et d'exposition était une fatigue pour le professeur comme pour l'élève. Au point de vue pédagogique, c'était un inconvénient. Si, en effet, certaines intelligences bien douées s'accommodaient fort bien de développements un peu longs qui les initiaient plus complètement aux méthodes, aux raisonnements mathématiques et leur donnaient une maturité plus grande et des connaissances plus approfondies, beaucoup d'autres étaient rebutées par des difficultés dont l'importance et les applications leur échappaient. Il était donc nécessaire de rendre l'enseignement des Mathématiques spéciales plus moderne, mieux approprié aux nécessités des Sciences pures et appliquées.

La Géométrie analytique prend ainsi un rôle un peu secondaire; elle sert principalement à éclairer par des applications nombreuses et immédiates les théories de l'Algèbre et de l'Analyse : l'étude de la concavité d'une courbe, par exemple, est intimement liée à la formule de Taylor ([1]). Aussi, certains professeurs de Mathématiques spéciales, j'avoue être de ceux-là, cherchent-ils à faire un cours d'ensemble de façon à juxtaposer la théorie et l'application.

([1]) La classification des coniques ou des quadriques à la théorie des formes quadratiques.

M. l'Inspecteur général Blutel vient de faire paraître, dans cet ordre d'idées, des Leçons qui, dans leurs grandes lignes, sont un modèle du genre. Mais, quelle que soit l'idée que l'on se fasse de la construction d'un cours de Mathématiques spéciales, il est certain qu'il est devenu utile de donner à l'enseignement de la Géométrie analytique un caractère de grande simplicité. Ce qui est essentiel et d'une application courante doit seul s'y trouver; l'artifice algébrique doit y être aussi simple que possible; les compléments sont réservés aux exercices.

A mon avis, les Auteurs ont fait là un Livre extrêmement clair, élégant même, et qui répond de tout point à ce que je disais plus haut. Bien des Chapitres m'ont rappelé les Leçons d'agrégation et surtout les critiques que nous faisait J. Tannery. Quand j'aurai dit que leur Livre porte, à un haut degré, l'empreinte de l'enseignement du Maître si regretté, je crois que j'aurai fait le plus bel éloge que l'on puisse faire de leur Ouvrage. Avant de l'analyser, ils me permettront cependant de leur faire une critique : c'est d'avoir séparé, j'allais écrire dissocié, le plan et l'espace. Toute étude géométrique du plan doit être, c'est mon opinion, accompagnée de l'étude correspondante de l'espace, et lorsque c'est possible, une même étude doit traiter des deux à la fois. La généralité et la portée de l'idée maîtresse se trouvent ainsi mieux mises en valeur, et la répétition des procédés soit de raisonnement, soit de calcul, produit une impression plus durable en même temps qu'elle soulage l'effort imposé à la mémoire de l'élève.

L'Ouvrage débute par l'énoncé du principe d'homogénéité : *Lorsqu'on a établi, entre les mesures des longueurs d'une même figure, une relation algébrique*

$$f(a, i, c, \ldots, e) = 0,$$

sans spécifier quelle est l'unité de longueur, cette relation est homogène ou équivaut à l'ensemble d'un certain nombre de relations homogènes. C'est clair et je ne pense pas qu'un élève puisse s'y tromper. La construction des formules en est l'application. Quelques rappels succincts sur la théorie des vecteurs, en particulier le *produit géométrique* et sa propriété de *distributivité* et nous sommes à même d'aborder la notion de coordonnées cartésiennes ou polaires, les formules fondamentales, les

changements d'axe de coordonnées. Un Chapitre est alors consacré à l'étude de la ligne droite. La notion de coordonnées homogènes et d'éléments à l'infini, introduite seulement après l'étude de l'intersection de deux droites et du faisceau linéaire, force les Auteurs à revenir sur ces sujets; c'est un léger détail. Les questions d'angles et de distances sont nettes et précises; la notion d'éléments imaginaires les suit.

Le rapport anharmonique est la pierre angulaire de ce qu'on a appelé la *Géométrie moderne*. On a poussé fort loin son rôle. Les Auteurs exposent à ce sujet tout ce qui est nécessaire en y rattachant, bien entendu, l'homographie et l'involution. Leur point de départ est le rapport anharmonique de quatre nombres, et son invariance par la substitution homographique la plus générale; le rapport anharmonique de quatre points d'une droite est alors le rapport anharmonique de leurs quatre abscisses sur cette droite. Cette façon de procéder introduit de suite le calcul même de préférence au symbole

$$(A, B, C, D),$$

ce qui, à mon avis, est plus clair pour les élèves. Les divisions homographiques, de même base ou de bases différentes, sont rapprochées de faisceaux homographiques, de même sommet ou de sommets différents; enfin les divisions et les faisceaux homographiques en involution sont traités concurremment.

Le cercle et les systèmes de cercles font, dans tous les Cours, l'objet d'une étude spéciale. Leurs propriétés géométriques sont bien connues de tous : les retrouver par le calcul est un excellent exercice d'assouplissement, mais il y a plus : sur l'équation de cette courbe, il est possible d'exposer les méthodes qui seront employées pour les courbes algébriques. C'est ce qu'ont fait les Auteurs, en particulier dans la recherche de la *forme homogène de l'équation de la tangente*. Ils emploient même les axes obliques, ce qui n'introduit aucune complication, mais je pense que les axes rectangulaires sont largement suffisants.

La représentation graphique des fonctions d'une variable ayant une très grande importance au point de vue des applications ultérieures, la construction des courbes devient un des Chapitres les plus utiles de la Géométrie analytique. Tout d'abord, les Auteurs étudient les courbes dont l'équation cartésienne est *résolue* ou

résoluble par rapport à l'une des coordonnées. Cette étude est divisée en deux parties : 1° étude de la courbe en un point à distance finie : tangente, normale, concavité, inflexion, ordre de contact; éléments géométriques attachés à la courbe : sous-tangente, sous-normale; 2° étude de la courbe en un point à l'infini : asymptotes, courbes asymptotes, disposition de la courbe. Cette exposition est accompagnée de nombreux exemples empruntés au domaine de la Physique. Puis ils abordent les courbes dont tous les points ont des coordonnées cartésiennes, fonctions données d'un paramètre variable. Ces courbes ont une grande importance en Cinématique. L'ordre suivi est le même. Les Auteurs ont, avec juste raison, insisté sur le cas singulier du *point d'inflexion*. Les exemples numériques sont encore plus nombreux et servent même de base à l'exposition de la théorie.

Enfin, l'étude des courbes d'équation non résoluble ouvre l'ère de nouvelles difficultés. Les Auteurs ne font qu'énoncer les conditions d'existence de la fonction implicite; ils ont parfaitement raison. Puis ils donnent les équations de la tangente et de la normale et quelques renseignements sur l'étude de la concavité et la recherche des points d'inflexion. Raisonnant sur l'équation générale $f(x, y) = 0$, ils sont tenus à rester dans le vague à moins de soulever toutes les difficultés qui se présentent, dans le cas des courbes algébriques particulièrement. Quant à moi, j'estime qu'un exemple bien choisi, tel que celui du *folium*, renseignerait mieux les élèves sur la façon de procéder. La recherche des asymptotes indiquée dans le cas général est poussée en détail dans celui des courbes algébriques. C'est là où des indications, même sommaires, sur la continuité des racines d'une équation entière deviendraient intéressantes pour les élèves; c'est l'avantage du cours d'ensemble. Enfin quelques conseils pratiques, en particulier sur l'emploi des théorèmes de Rolle et de Descartes, et de bons exemples terminent cette exposition [1].

Les courbes algébriques et en particulier l'étude de leurs points singuliers retiennent assez longuement les Auteurs; je ferai ici la

---

[1] Peut-être serait-il intéressant de faire remarquer ici, après l'exposition de tous ces procédés de construction, l'application que l'on peut en tirer pour la résolution graphique des équations, et exposer les diverses méthodes d'approximation ?

même remarque que pour l'étude des asymptotes de ces courbes; au reste, les deux problèmes sont identiques. Dans cette catégorie, les courbes unicursales jouent un rôle important, tant au point de vue de l'Analyse que de la Géométrie. Les Auteurs attirent, avec raison, l'attention des élèves sur la représentation propre ou impropre d'une telle courbe et s'étendent longuement sur la propriété des points multiples.

L'étude des coordonnées polaires et tout particulièrement la construction des courbes occupent le Lecteur pendant un long et intéressant Chapitre. Les résultats sont classiques, mais on sent que les Auteurs ont cherché les solutions les plus intuitives, en particulier dans l'étude de la concavité. Des exemples nombreux font bien comprendre les différentes singularités : points multiples, points et cercles asymptotes; enfin une étude élégante des *conchoïdes* et des *cubiques circulaires unicursales* termine ce Chapitre.

Au point de vue pratique, une courbe est fort souvent définie autrement que par son équation ou une représentation paramétrique. Elle peut être définie par une propriété géométrique. Si la propriété ne fait intervenir aucun élément différentiel de la courbe, on peut se proposer de rechercher son équation ou quelque représentation paramétrique. Dans le cas contraire, on est conduit à une équation différentielle. La recherche d'un lieu géométrique rentre dans le premier type. Les Auteurs montrent nettement le problème algébrique qui lui est substitué et les restrictions nécessaires qui s'imposent. La théorie des enveloppes rentre aussi dans le même type. On peut aborder le problème de deux façons légèrement différentes : partir soit de l'*enveloppe* elle-même et de la propriété de contact, soit de l'*enveloppée* et définir l'enveloppe comme lieu des *points caractéristiques*. Ces deux définitions ne sont pas équivalentes d'une manière absolue. Tout ceci est clairement montré ainsi que les singularités courantes qui se rencontrent dans cette étude. Parlant des enveloppes à deux paramètres, les Auteurs ont eu soin de s'étendre un peu longuement sur le problème qui consiste à trouver l'équation *ponctuelle* d'une courbe, connaissant son équation *tangentielle*. Pour le second type de problème, les Auteurs se bornent au cas où l'on fait simplement intervenir une propriété de l'*élément de contact*

de la courbe; l'équation différentielle est donc du premier ordre. C'est là le cas le plus fréquent, surtout dans la pratique des examens. Ces courbes méritent donc une attention particulière, mais je persiste à croire que cette étude serait mieux à sa place après les leçons sur les équations différentielles qui sont indiquées au programme. Au reste, les Auteurs sentent fort bien qu'ils doivent au Lecteur quelques explications sur la théorie analytique des équations différentielles et en particulier sur les *intégrales singulières*. A cette légère divergence de vue près, je dois dire que les Auteurs ont su réunir une suite de remarques et d'applications qui seront des plus intéressantes pour les élèves et surtout leur fera comprendre le rôle de la constante d'intégration.

L'application de l'Analyse à la Géométrie tient une grande place dans le programme actuel : les Auteurs lui ont consacré un long et intéressant Chapitre. Il définissent tout d'abord la longueur de l'arc de courbe et donnent les différentes formes de l'élément d'arc sans insister sur quelques difficultés théoriques peu intéressantes pour les élèves et sur lesquelles il est toujours possible de revenir dans les exercices. L'orientation d'une courbe, le calcul des cosinus directeurs de la tangente orientée sont des questions d'une grande utilité en Mécanique; ils ont insisté avec juste raison. La courbure, le rayon de courbure, le centre de courbure, la développée et la développante d'une courbe sont autant de questions intéressantes que les Auteurs ont traitées avec clarté, élégance et sobriété; ils signalent, pour terminer, la propriété de l'équation *intrinsèque* d'une courbe, de la définir en grandeur.

La théorie des coniques terminent l'Ouvrage. Tout d'abord, les Auteurs exposent les généralités indispensables à l'étude des courbes du second degré. La distinction des coniques en trois genres, d'après la nature des points à l'infini, les conduit à la recherche pratique des asymptotes. La classification des coniques par la décomposition en carrés du premier membre de leur équation est exposée par la méthode de Gauss [1]. L'étude des différentes formes est très utile et doit, dans la pratique, être souvent faite sur des équations numériques. L'étude de l'intersection d'une droite et d'une conique les conduit à la notion de tangente en un point.

---

[1] Il serait bon, je crois, de signaler la loi d'inertie.

à celles de points doubles et d'équation tangentielle. A ce propos se trouvent énoncées les conditions pour qu'une conique ait un point double ou une infinité de points doubles; peut-être pourrait-on signaler, dans ce dernier cas, que les conditions énoncées ne sont pas indépendantes.

La question des pôles et polaires est du plus grand intérêt dans l'étude des coniques; elle contient l'étude du centre, des diamètres, des axes. Les Auteurs insistent sur la *réversibilité* de la forme polaire et sur les expressions des coordonnées du pôle d'une droite à l'aide de l'équation tangentielle de la conique; quelques notions rapides et claires sur les points conjugués, les droites conjuguées, les triangles conjugués, les pôles et polaires d'éléments à l'infini terminent cette étude volontairement brève et réduite à ce qu'elle a d'essentiel. La recherche et la discussion des centres, des diamètres (véritables ou singuliers) et des diamètres conjugués sont ensuite exposées et les Auteurs abordent la recherche pratique des équations réduites. La méthode est ici fixée par le rapport de la Commission interministérielle : un transport d'axes suivi d'une rotation pour les coniques à centre, une rotation suivie d'un transport d'axes pour les coniques du genre parabole. Les Auteurs signalent la méthode rapide du calcul des axes à l'aide d'un cercle concentrique; très intéressante, elle s'étend aux axes obliques et à la recherche des axes d'une section plane d'une quadrique. Les foyers et directrices terminent ces généralités; la définition de Plücker y est signalée avec toute l'importance qu'elle a dans les applications. La recherche des foyers sur les équations réduites amène le Lecteur à l'équation polaire commune aux trois coniques.

L'étude des coniques à centre, sur équations réduites, est poussée en détail, tant au point de vue algébrique qu'au point de vue géométrique; ils sont en effet intimement liés l'un à l'autre et se complètent mutuellement. Les Auteurs insistent, entre autres choses, sur la signification du paramètre φ, angle d'anomalie dans l'ellipse, et sur son emploi. Les problèmes sur les tangentes, les propriétés diamétrales tant descriptives que métriques, les propriétés particulières des asymptotes de l'hyperbole et les propriétés focales sont exposés avec beaucoup de clarté et d'ordre. Un paragraphe particulier est consacré aux problèmes sur les normales et à la développée. L'étude de la parabole est poursuivie dans le même

ordre; enfin les Auteurs signalent différentes expressions du rayon de courbure d'une conique et principalement la construction du centre de courbure en un point quelconque; pour la Géométrie descriptive, en particulier, ces remarques sont intéressantes.

L'étude des propriétés des ensembles de coniques est forcément restreinte d'après l'esprit même du programme. La transformation par polaires réciproques continue à être enseignée dans les Cours, le principe de dualité ayant une grande importance; l'intersection des coniques est réduite à ce qu'elle a de fondamental; aussi, les Auteurs ont-ils cru nécessaire de prendre de nombreux cas particuliers qui seront des plus utiles aux élèves. L'homothétie et particulièrement les coniques homothétiques sont traitées sans perdre de vue le sens géométrique. Un dernier Chapitre, consacré à l'homographie et l'involution sur une conique, contient en particulier les théorèmes classiques de Pascal, Brianchon et Frégier.

Pour terminer, je dirai que j'ai eu grand plaisir à parcourir ce Livre qui m'a rappelé bien souvent l'enseignement qui nous a été donné et cela sous une forme agréable, claire et concise. J'espère que les élèves sauront l'apprécier à sa valeur. Il a été écrit pour eux et rien n'a été négligé pour leur en rendre la lecture plus aisée. Les Auteurs y ont apporté toutes leurs qualités professionnelles, leur expérience, et l'Éditeur a tout fait pour que la forme elle-même en augmentât les qualités.

E. Ouivet.

MÉLANGES.

LA CONFÉRENCE INTERNATIONALE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, TENUE A PARIS DU 1er AU 4 AVRIL 1914;

Par M. René GARNIER.

Créée en 1908 à la suite d'un vœu du Congrès mathématique international de Rome, prolongée en 1912, à Cambridge, jusqu'au prochain Congrès de Stockholm, la Commission internationale de l'Enseignement mathématique semblerait remonter à une lointaine

origine s'il fallait la juger par le nombre, l'étendue et l'importance de ses publications. En cinq années de travail, elle a produit 300 Rapports formant plus de 160 Fascicules ou Volumes, et embrassant tous les ordres de l'Enseignement mathématique : primaire, secondaire, supérieur et technique. Tout récemment, la Commission donnait une vivante manifestation de son activité par la Conférence qu'elle organisait à la Sorbonne : 161 mathématiciens de toutes nationalités s'y rencontrèrent. Le succès de la Conférence fut des plus brillants et des plus justifiés; aussi bien, tout conspirait en sa faveur : la présence de savants éminents, l'intérêt et l'importance des Rapports et des Communications, enfin l'inlassable activité de son dévoué secrétaire général, M. H. Fehr.

L'analyse détaillée de tous les travaux de la Conférence dépasserait de beaucoup le cadre du *Bulletin;* nous résumerons donc très rapidement les séances, quitte à nous arrêter quelque peu sur les Discours de la séance d'ouverture.

Les travaux proprement dits de la Commission durèrent trois jours, du jeudi 2 avril au samedi 4 avril; ils furent précédés d'une séance préliminaire où les participants prirent contact les uns des autres : le 1er avril, à $14^h 30^m$, le Comité central, sous la présidence de Sir George Greenhill, Vice-Président, se réunissait à l'amphithéâtre Le Verrier et adoptait le règlement proposé par M. H. Fehr. A 16^h, M. Castelnuovo présidait une première séance de délégués, et, à 21^h, la Société mathématique de France conviait les membres de la Conférence à participer à ses travaux. La réception de la Société fut particulièrement réussie; dans une aimable allocution, M. E. Vessiot, Président en exercice de la Société, souhaita la bienvenue aux délégués, et l'on entendit ensuite deux Communications, l'une de M. J. Hadamard, l'autre de M. H. Lebesgue.

Ce fut le jeudi 2 avril que débutèrent les séances officielles de la Commission. A $9^h 30^m$, M. G. Darboux, représentant le Ministre de l'Instruction publique, présidait la séance d'ouverture à l'amphithéâtre Richelieu. Cette séance fut consacrée à trois Discours de MM. Appell, Castelnuovo et Darboux, et à deux Conférences de MM. E. Borel et M. d'Ocagne.

Président d'honneur de la délégation française, M. P. Appell

avait bien voulu souhaiter la bienvenue aux « professeurs, ingénieurs et savants venus des pays les plus divers pour prendre part aux travaux de la Conférence ». Après avoir félicité la Commission de son zèle et de son activité, M. P. Appell rendit un pieux hommage à la mémoire de C. Bourlet, qui avait mis au service de la Commission « ses rares qualités d'organisateur et de professeur, sa connaissance approfondie de l'enseignement scientifique et de l'enseignement technique ».

Puis, M. Castelnuovo, membre du Comité central, prit la parole au nom de M. F. Klein, absent pour raison de santé. Parfois on a exprimé cette crainte que la Commission de l'Enseignement mathématique ne soit inféodée à telle ou telle doctrine, et qu'elle ne cherche à imposer ses tendances. Aussi M. Castelnuovo tenait-il à protester contre une pareille intention : la Commission n'a « ni les moyens, ni le désir de réformer radicalement l'enseignement mathématique ». Il aborde ensuite ce sujet proposé par le Comité central : l'examen des résultats obtenus par l'introduction du Calcul infinitésimal dans l'enseignement secondaire, et l'étude du rôle des Mathématiques dans la préparation des ingénieurs; et ceci l'amène à exprimer quelques paroles aimables à l'adresse de la France, de ses savants, de ses professeurs : « Nulle part mieux qu'à Paris nous n'aurions trouvé des conditions favorables à nos travaux... La France d'ailleurs a consacré depuis plus d'un siècle ses soins les plus assidus à la préparation des ingénieurs, et a compris l'importance de ce problème en une époque où le développement colossal de l'industrie moderne ne pouvait encore être prévu. A la glorieuse École Polytechnique, d'autres Instituts ont été adjoints pour répondre aux nouveaux besoins qui se sont présentés. La multiplicité de ces grandes Écoles et la diversité de leur organisation nous fourniront des sujets de comparaisons instructives. » Après avoir évoqué les noms de Vogt et de Bourlet, M. Castelnuovo tient à signaler une fois de plus la part que la délégation française a pris dans les travaux de la Commission : « Mais le cercle des personnes qui s'intéressent (en France) aux problèmes de l'Enseignement est bien plus vaste et comprend tous (les) savants. On dirait que les découvertes admirables que notre science doit à leur génie n'ont pas suffi à l'activité de leur esprit. En suivant une noble tradition qui remonte à Monge et à

Lagrange, ils ont voulu porter l'influence de leur savoir au profit des écoles. C'est là un grand exemple qu'ils nous donnent et même un encouragement précieux. » Enfin, M. Castelnuovo termine son beau Discours par des paroles très élevées sur l'utilité sociale de la Science, « la plus précieuse des richesses, celle qui forme notre orgueil et qui est la source de nos jouissances les plus pures ».

C'est encore par un hommage à la Science que débute le Discours de M. G. Darboux. C'est à la Science qu'on doit les merveilleuses découvertes qui ont transformé les conditions matérielles de la vie des peuples. De jour en jour, les résultats se font plus nombreux, plus importants; les faits nouveaux s'accumulent; les recherches deviennent aussi plus difficiles. Si l'on veut que l'élite intellectuelle de demain soit à même de continuer l'œuvre entreprise; si l'on veut, plus modestement, que la moyenne de nos écoles, celle qui, plus tard, formera le « grand public », puisse rendre pleine justice à l'action civilisatrice et sociale de la Science, il faut agir sans retard et rendre à la Science la part qui lui est due dans l'Enseignement. Et, au fond, n'est-ce pas ainsi qu'on se rapprochera le mieux des penseurs de l'Ionie, des philosophes de la Grande Grèce, des maîtres d'Alexandrie? N'est-ce pas leur rendre le plus bel hommage que de penser et d'agir comme ils l'auraient fait s'ils avaient été nos contemporains, que de rapprocher la jeunesse de cet idéal qui fut toujours le but de leur vie et leur préoccupation suprême?

C'est ainsi qu'à nos yeux du moins, la réforme de l'Enseignement secondaire, sous des apparences révolutionnaires, puise à la véritable source classique; elle se rattache étroitement à ce patrimoine intellectuel gréco-latin qui a été et restera toujours le patrimoine de l'humanité tout entière. Et pourtant, chez les esprits timorés ou arriérés, que d'obstacles dans la réalisation de cette réforme! M. G. Darboux rappelle malicieusement que cet état d'esprit date de loin : il y a cinquante ans, il siégeait dans une Commission à côté d'un professeur de lettres qui, à toutes ses avances, finit par répondre : « Les sciences sont quelque chose de bien envahissant. » C'est qu'alors « le professeur de Mathématiques était considéré comme de classe inférieure, assimilé au professeur de gymnastique ou de dessin ».

Et ici se pose un problème redoutable : si le cadre général de l'enseignement ne peut être aujourd'hui ce qu'il était il y a un demi-siècle, s'il doit suivre les progrès incessants de la Science, comment concilier cette évolution avec les lois immuables de l'Enseignement : l'intelligence de l'enfant est limitée; le temps lui est mesuré; et pourtant, suivant la très belle formule de M. G. Darboux, il faut « faire de l'enfant un homme en état d'aborder avec les moyens nécessaires toutes les difficultés et toutes les tâches de la vie à laquelle il est destiné, capable surtout, à l'aide des notions acquises, de continuer à recevoir des hommes et des choses cet enseignement et ce développement qui ne doivent finir qu'à son dernier jour ». La solution d'un problème aussi difficile ne peut s'obtenir qu'en laissant aux cadres de l'enseignement une souplesse, une élasticité en rapport avec les intelligences les plus diverses. Tel a été le but de la réforme de 1902 et c'est ainsi que, dans les deux dernières sections du second cycle, les sciences ont une place prépondérante. Malgré l'engouement un peu excessif, sans doute, du début, le nombre des adeptes des deux séries C et D ne décroît pas; physiciens, naturalistes, philosophes, lettrés viennent s'abreuver à la source scientifique : c'est une période nouvelle qui s'ouvre, période où « tout sera en perpétuel devenir », période où les programmes devront toujours être surveillés attentivement et rectifiés à chaque instant.

Telle est la tâche qui s'impose tout particulièrement aux Membres de la Commission de l'Enseignement mathématique. Comme le remarque M. G. Darboux en terminant, il est quatre points essentiels qu'on peut considérer « comme acquis en Mathématiques depuis notre réforme de 1902, ce sont :

« 1° L'introduction dans l'Enseignement élémentaire du Calcul des dérivées et même de notions de Calcul intégral;

» 2° L'emploi systématique dans la Géométrie des méthodes de transformation qui simplifient l'étude et apportent un principe de classification;

» 3° Le développement donné aux applications qui sont posées par la pratique, à l'exclusion des problèmes qui n'ont aucune racine dans la réalité;

» 4° Le développement aussi complet que possible de l'initiative personnelle chez tous les élèves qui prennent part à l'enseigne-

ment, et une préoccupation incessante d'une bonne formation de l'esprit. »

L'appel de M. G. Darboux trouva en quelque sorte une première réponse dans une importante Conférence de M. E. Borel sur « L'adaptation de l'Enseignement secondaire aux progrès de la Science »; et, enfin, la séance d'ouverture se termina par une autre conférence, faite par M. M. d'Ocagne sur « Le rôle des Mathématiques dans les sciences de l'ingénieur ».

Le soir, à $14^h 30^m$, M. J. Hadamard, qui venait d'être choisi comme membre du Comité central, présidait une séance à l'amphithéâtre de Chimie; cette séance fut consacrée d'abord à la lecture de deux Rapports : le Rapport général de M. E. Beke sur « Les résultats obtenus dans l'introduction du Calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures de l'Enseignement secondaire », et le Rapport spécial de M. C. Bioche sur « L'organisation de l'enseignement du Calcul des dérivées et des fonctions primitives dans les Lycées de France et les résultats obtenus ».

Le Rapport très important et très documenté de M. E. Beke s'appuie sur les réponses fournies par 18 pays à un questionnaire publié par la Sous-Commission A : ce questionnaire, très détaillé, comportait les six questions principales suivantes :

I. Dans quelle mesure a-t-on introduit les premiers éléments de Calcul différentiel et intégral dans les écoles moyennes de votre pays?

II. Quel est le degré de rigueur dont on fait usage dans l'introduction des concepts fondamentaux et dans les démonstrations?

III. Quelles sont les considérations méthodiques que l'on suit dans l'introduction au Calcul différentiel et intégral?

IV. Quelles sont les applications du Calcul différentiel et intégral que l'on donne dans ce premier enseignement?

V. L'introduction du Calcul différentiel et intégral a-t-elle amené un allégement du plan d'études en supprimant d'autres théories? Dans l'affirmative, de quelle manière?

VI. Quels sont les résultats obtenus par l'introduction du Calcul différentiel et intégral? Est-t-elle reconnue comme une réforme nécessaire? Dans quelle mesure rencontre-t-elle de l'approbation ou de l'opposition?

On pourrait résumer ainsi les conclusions de M. E. Beke : dans tous les pays qui ont participé à l'enquête, l'introduction du Calcul infinitésimal dans l'Enseignement secondaire fait des progrès indéniables et continus; lorsqu'il s'agit de démonstrations trop délicates, le professeur demande d'admettre le résultat (tout en prévenant les élèves de l'existence d'une preuve rigoureuse). En effet, le but poursuivi réside surtout dans une économie de temps et de méthode, ainsi que dans la liaison de l'enseignement des Mathématiques avec celui de la Physique et de la Mécanique. Les résultats obtenus à cet égard sont très appréciables; quant aux obstacles rencontrés (surtout à l'étranger) par la réforme de l'Enseignement mathématique, ils proviennent principalement de professeurs d'Université, dont les scrupules excessifs se manifestent de plus en plus rarement.

Le Rapport spécial de M. C. Bioche se limite à l'application de la réforme en France. Une modification a été accomplie en 1912 : les dérivées ont été supprimées du programme de Seconde; on les définit en Première, où leur emploi est d'ailleurs limité au cas de certaines fractions rationnelles très simples; enfin, en Mathématiques, on étudie des dérivées dont le calcul exige la notion de limite. Après avoir dit quelques mots de la classe de Mathématiques spéciales, M. C. Bioche montre, par des énoncés de problèmes bien choisis, que les nouvelles méthodes ont eu plein succès auprès des élèves. Il termine en constatant que ce succès n'a pas été moindre chez les maîtres : les professeurs de Physique voient dans la réforme une importante simplification de la partie mathématique de leur enseignement; les professeurs de Mathématiques parviennent à faire discuter par de futurs bacheliers les équations de Van der Waals et à leur faire calculer le moment d'inertie d'une sphère par rapport à un diamètre.

Après la lecture des Rapports de MM. E. Beke et C. Bioche, les délégués de la Conférence donnèrent quelques explications complémentaires sur l'enseignement mathématique dans leurs pays respectifs, et l'on aborda la discussion générale du Rapport de M. E. Beke.

Les séances du vendredi 3 avril se rapportèrent exclusivement à l'enseignement technique; à 9^h30^m, M. P. Staeckel lisait à la Sorbonne (amphithéâtre Milne-Edwards) son Rapport général sur

« La préparation mathématique des ingénieurs dans les différents pays ». Après avoir entendu des explications supplémentaires fournies par divers délégués, la Commission écouta la lecture du résumé de M. P. Staeckel, destiné à servir de base à la discussion générale du Rapport. Cette discussion eut lieu à 14^h30^m, sous la présidence de M. J. Hadamard (amphithéâtre Milne-Edwards); elle fut résumée le soir, à 21^h, à la Société des Ingénieurs civils de France, par M. M. d'Ocagne, puis reprise et développée par de nombreux délégués; la conclusion qui s'en dégagea fut très nette : l'enseignement mathématique destiné au futur ingénieur ne doit pas avoir un caractère exclusivement utilitaire; son bagage scientifique doit reposer sur des fondements théoriques très sérieux.

Le samedi 4 avril était le jour de clôture; à 9^h30^m, l'amphithéâtre Milne-Edwards entendait la fin de la discussion du Rapport de M. E. Beke, ainsi que quelques Communications sur l'histoire et la philosophie des Mathématiques. A 14^h30^m (amphithéâtre Le Verrier), les délégués, sous la présidence de M. Castelnuovo, fixaient le programme de leur prochaine réunion dont l'objet principal sera « la préparation théorique et pratique des professeurs de Mathématiques des divers degrés de l'enseignement ». Enfin, à 21^h30^m, la journée se terminait par une réception très brillante chez S. A. le Prince Bonaparte. Un grand nombre de membres du corps diplomatique et de nombreux académiciens y assistaient; les salons et la splendide bibliothèque du Prince étaient ouverts aux invités. C'est ainsi que prirent fin les réunions des membres de la Conférence; c'est ainsi que, jusqu'au dernier instant, tout concourut pour laisser dans l'esprit de chaque délégué la meilleure et la plus chaude impression de l'accueil de la France.

Publications parues depuis le Congrès de Cambridge [1].

(Août 1912-Mars 1914.)

Comité central. — 2e série : Fascicule 1. — Compte rendu du Congrès de Cambridge, 21-27 août 1912, publié par H. Fehr (97 p.; $2^{fr}.50$).

Fascicule 2. — Conférence internationale de l'Enseignement mathématique, Paris, 1-4 avril 1914. Travaux préparatoires (34 p.; $0^{fr}.75$).

Allemagne. — *Abhandlungen :* Band I, Heft 5. Die neuzeitliche Entwicklung des mathematischen Unterrichts an den höheren Mädchenschulen Deutschlands insbesondere Norddeutschlands, von Prof. Dr. J. Schröder. Mit einem Schlusswort zu Band I von F. Klein (xii-183 p.; M. 6).

Band II, Heft 8. — Neue Erlasse in Bayern, Württemberg und Baden, von W. Lietzmann, E. Geck, H. Cramer. Mit einem Schlusswort zu Band II von A. Thaer (ix-49 p.; M. 1,50).

Band III, Heft 8. — Psychologie und mathematischer Unterricht, von Dr. D. Katz (120 p.; M. 3,20).

Band IV, Heft 2. — Die angewandte Mathematik an den deutschen mittleren Fachschulen der Maschinenindustrie, von Dipl. Ing. K. Ott (vi-158 p.; M. 4).

Band IV, Heft 5. — Die mathematischen Fächer an den niederen gewerblichen Lehranstalten in Deutschland, von Dip. Ing. W. Trost (vi-147 p.; M. 4).

Band IV, Heft 8. — Die mathematische Ausbildung der Deutschen Landmesser, von Dr. P. Furtwängler und G. Ruhm (vi-50 p.; M. 1,60).

Band V, Heft 4. — Der mathematische Unterricht an den Volksschulen und Lehrerbildungsanstalten in Sachsen, Thüringen und Anhalt, von H. Dressler und K. Körner (v-132 p.; M. 4,80).

Band V, Heft 6. — Die Organisation des mathematischen Unterrichtes in den preussichen Volks- und Mittelschulen, von W. Lietzmann (v-106 p.; M. 3).

Berichte und Mitteilungen : Heft VIII. — Nachruf auf Peter Treutlein, von P. Stäckel, sowie Der Internationale Mathematikerkongress in Cambridge, von W. Lietzmann (58 p.; M. 1,60).

Heft IX. — Mathematische Lehrmittelsammlungen, insbesondere für höhere Schulen, von H. Dressler (31 p.; M. 1).

Italie. — Fascicule 10 : Sui libri di testo di geometria per le scuole secondarie superiori, par prof. Scorza (15 p.).

Suisse. — L'Enseignement mathématique en Suisse. — Annexe : Réformes à accomplir dans l'Enseignement mathématique en Suisse. (Reprodnit dans les trois langues, 34 p.; 0fr,50.)

---

(1) La liste des publications parues de 1908 à 1912 a été insérée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, numéro de décembre 1912, 1re Partie, p. 368-384.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

OPERE MATEMATICHE DI LUIGI CREMONA, pubblicate sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei. *Tomo Primo con ritratto dell' Autore.* 1 vol. in-4°, VIII-492 pages. Milano, Ulrico Hoepli, 1914.

La maison d'édition U. Hoepli de Milan poursuit avec persévérance la publication qu'elle a entreprise depuis 15 ans des OEuvres complètes des grands géomètres italiens. Après les cinq Volumes, commencés en 1901 et terminés en 1909, des OEuvres de Brioschi, après les trois Volumes des OEuvres d'E. Beltrami, après les deux Volumes, dont le second n'a pas encore paru, consacrés aux Mémoires de Betti, voici qu'elle entreprend la publication des OEuvres de Cremona sous les auspices de l'Académie royale des Lincei, dont Cremona fut un des membres les plus actifs et les plus éminents. Cette publication a été confiée à un comité composé de MM. Bertini, Castelnuovo, Dini, d'Ovidio, Segre, Veronese. Le Directeur de la publication est M. Bertini, qui n'a par manqué de s'éclairer des conseils empressés de tous ceux qui s'intéressent à la Géométrie et à la mémoire de Cremona, MM. Bianchi, Fano, Loria, Montesano, Nicoletti, Petarelli, Segre, Terracini, Torelli. Elle sera complète en trois Volumes et comprendra toutes les parties, même les exercices et les articles bibliographiques du grand géomètre italien, à l'exception pourtant de deux Traités didactiques : le *Calcolo grafico* et la *Geometria projettiva*, que d'ailleurs l'éditeur ne tardera pas à réimprimer.

Le Volume que nous avons sous les yeux comprend les travaux de jeunesse, alors que Cremona était un collaborateur assidu de nos *Nouvelles Annales de Mathématiques*, dirigées par le regretté Terquem, et qu'il ne craignait pas, en cette qualité, d'envoyer des solutions aux questions proposées par les collaborateurs de ce journal. En dehors de ces solutions, nous trouvons des Articles bibliographiques fort intéressants sur d'importants Ouvrages de Géométrie : les *Beiträge zur Geometrie der Lage* de v. Staudt, les *Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung* de O. Hesse.

Mais nous signalerons de préférence une introduction étendue au Cours de Géométrie supérieure que Cremona a fait en 1860 à l'Université de Bologne. Les Articles de recherche proprement dits, dont plusieurs se rattachent aux travaux de Chasles, ont pour objet les coniques sphériques, les cubiques gauches et les développables corrélatives, les surfaces homofocales, la courbe gauche du quatrième ordre située sur une seule surface du second degré, la géométrie des courbes tracées sur l'hyperboloïde à une nappe, etc. C'est dans les Volumes suivants que paraîtront les parties maîtresses de l'Œuvre de Cremona ; mais dès à présent, nous devons signaler que ce premier Volume contient l'*Introduzione ad una teoria geometrica della curve piane*, Ouvrage de 150 pages in-4°, qui a été consulté avec tant de profit par tous ceux qui voulaient approfondir la théorie des courbes planes de degré supérieur.

G. Darboux.

SALMON (George). — A Treatise on the analytic Geometry of three dimensions, edited by R. A. P. Rogers. Fifth Edition, Vol II. 1 vol in-8. XVI-331 pages. London, Longmans Green and Co; Dublin, Hodges, Figgis and Co ; 1915.

Le Volume est de ceux qui ont à peine besoin d'être annoncés. Les Ouvrages de Salmon ont une réputation mondiale et, bien qu'ils soient déjà anciens, ils peuvent encore nous rendre les plus grands services. Au reste, leur distingué éditeur a soin de les tenir au courant. Et, dans cette nouvelle édition, nous remarquons de très intéressantes additions relatives aux congruences rectilignes, aux complexes quadratiques, aux congruences isotropes de Ribaucour, aux systèmes cycliques, etc. En ce qui concerne la Géométrie analytique proprement dite, nous signalerons des compléments étendus relatifs aux surfaces du quatrième ordre, aux transformations de Cremona, à la théorie des surfaces réciproques de Cayley. On voit que le succès et l'influence des Œuvres de Salmon ne sont pas près d'être épuisés.

G. Darboux.

COTTON (Émile). — Cours de Mécanique générale. Introduction à l'étude de la Mécanique industrielle. (Bibliothèque de l'Élève-ingénieur.) *Vecteurs. Géométrie des masses. Principes. Cinématique. Statique.* Tome I, gr. in-8, 166 pages. Grenoble, Jules Rey. Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1914.

Dans ce Cours, M. Emile Cotton s'est proposé, comme il le dit dans l'Introduction, « d'exposer d'une façon élémentaire, pour de futurs ingénieurs, les propositions fondamentales de la Mécanique ». Les notions théoriques indispensables pour l'étude des applications industrielles de la Mécanique ne sont pas toutes présentées; mais cette étude est préparée et le livre mérite bien le sous-titre d'Introduction à l'étude de la Mécanique industrielle, que lui a assigné son Auteur.

Ce Cours ne suppose connues que les notions les plus importantes d'algèbre, d'analyse et de géométrie analytique qui sont la base d'un enseignement aujourd'hui très répandu et dont la faveur auprès des étudiants des Facultés des Sciences va sans cesse en croissant : l'enseignement des *Mathématiques générales* dont le niveau et le but ne sont pas dépassés par l'Auteur. Non seulement, le calcul ne joue pas un rôle prépondérant dans ce Cours, comme dans l'enseignement tel qu'il est donné ordinairement dans les classes de *Mathématiques spéciales* par exemple, mais il est très peu utilisé. Son emploi semble même répugner à M. Cotton qui lui reproche de masquer la vue des objets sur lesquels on opère et de ne pas préparer l'étudiant à l'utilisation pratique de la Mécanique. Toutes les questions dont l'intérêt est purement analytique et réside plus dans la solution qu'en fournit l'analyse que dans l'interprétation mécanique du résultat et de la méthode suivie, sont systématiquement laissées de côté. Cependant, aucun sacrifice n'est fait à la rigueur et le contraire étonnerait ceux qui connaissent les travaux du profond mathématicien qu'est M. Cotton. Les futurs ingénieurs ne devant jamais avoir à se débattre avec les difficultés analytiques, mais bien plutôt avec des difficultés pratiques, M. Cotton se borne à renvoyer aux Traités de Mécanique rationnelle pour trouver la démonstration rigoureuse des propositions que le bon sens et une intuition bien dirigée font apparaître comme évidentes. Son Ouvrage ne fera,

certes, pas naître des vocations mathématiques; il ne formera pas de théoriciens, mais il éveillera cette intuition indispensable aux praticiens et qui, comme on peut s'en convaincre en lisant ce Cours, est susceptible, dans bien des cas, de mener très loin sans l'aide d'aucun raisonnement d'analyse. Les définitions sont données avec une précision impeccable; sur les règles fréquemment utilisables, l'Auteur insiste beaucoup; il les illustre de nombreuses applications concrètes. De nombreux exercices très élémentaires, des applications numériques à la fin de chaque Chapitre, habitueront de bonne heure l'étudiant à appliquer les règles apprises et à évaluer rapidement les grandeurs des résultats. On sait combien cette estimation des ordres de grandeur des résultats, qui ne s'acquiert que par une longue pratique, est indispensable aux physiciens et aux ingénieurs. Un point délicat, on le devine, était l'exposé des principes de la Mécanique. Il y avait là, pour rester au point de vue élémentaire, une difficulté considérable dont M. Cotton a si bien triomphé que le Chapitre relatif aux Principes contient, croyons-nous, les plus belles pages de cet Ouvrage, et suffirait à lui seul à le signaler, aussi bien aux théoriciens qu'aux praticiens. En particulier, les professeurs de l'enseignement secondaire et tous ceux qui doivent enseigner la Mécanique élémentairement et pour ses applications pratiques, de jour en jour plus nombreuses, consulteront utilement ce petit modèle de clarté, d'élégance et de simplicité.

Le Chapitre I est consacré à la théorie des vecteurs, à la recherche des centres de gravité et des moments d'inertie. Dans l'exposé de la théorie des vecteurs, les démonstrations ne sont indiquées que très rapidement. La plupart des étudiants connaissent déjà cette théorie qui est développée dans les Ouvrages élémentaires et il n'est besoin que de rafraîchir leurs souvenirs et préciser leurs idées. Toutes les questions de sens sont traitées en introduisant un observateur traversé des pieds à la tête par un axe (ayant à sa droite certains éléments ou voyant un point se déplacer de sa droite vers sa gauche ou inversement) et en faisant appel à la vision. C'est la méthode habituellement suivie. Dans le calcul des centres de gravité, l'Auteur insiste sur l'emploi des éléments de symétrie du système matériel supposé d'abord formé d'un nombre fini de points et ensuite d'une matière continue et en

général homogène, ce qui est le cas rencontré dans la pratique industrielle. De très nombreux exercices, suivis de quelques indications relatives à la solution, permettent le calcul de la position du centre de gravité des solides homogènes usuels : triangle, tétraèdre, cylindre droit ou oblique, ligne courbe, arc de cercle, arc d'hélice, surfaces du trapèze, du quadrilatère, du secteur circulaire, du secteur d'anneau circulaire, du segment de cercle à une base, du segment parabolique, d'une zone de surface de révolution avec application à la zone sphérique, à la sphère, au cône et au cylindre, volumes des pyramides, cônes, solides de révolution, calotte de paraboloïde, segment sphérique, etc., le tout terminé par des indications pratiques sur le calcul des centres de gravité, la démonstration des théorèmes de Guldin et leurs applications. M. Cotton définit ensuite les moments d'inertie d'un ensemble de points matériels par rapport à une droite, à un plan, à un point et les rapports mutuels de ces trois sortes d'éléments qui interviennent souvent en Dynamique et dans les calculs de résistance des matériaux. Le calcul des moments d'inertie et des rayons de gyration des systèmes simples, l'étude de la variation du moment d'inertie et les théorèmes classiques sur cette variation et les axes principaux d'inertie précèdent de nombreux exercices de calcul pratique des moments d'inertie des corps qui se présentent dans les mécanismes industriels.

La Cinématique est l'objet du Chapitre II. Les notions si importantes de système invariable et la relativité des états de repos et de mouvement retiennent un peu l'Auteur qui, après avoir ensuite précisé la notion de vitesse numérique d'un mouvement rectiligne uniforme, passe ensuite à celle de vitesse moyenne dans un mouvement quelconque et enfin à la définition de la vitesse numérique, puis du vecteur vitesse à un instant donné. L'accélération est définie comme limite d'un certain vecteur accélération moyenne dont la définition, faisant intervenir des quantités infiniment petites avec le temps, aurait peut-être été avantageusement remplacée par celle qu'en fournit si simplement la considération de l'hodographe. Évidemment, cette dernière a l'inconvénient de détacher l'attention de l'élève de ce qui se passe sur la trajectoire même, mais elle évite l'introduction très délicate et difficile à bien comprendre du vecteur accélération moyenne dont la longueur égale le quotient de

deux quantités qui deviennent infiniment petites simultanément. Les formules classiques sur la représentation analytique des vitesses et des accélérations et de nombreux exercices où figurent l'étude des principaux mouvements simples terminent la Cinématique du point.

La deuxième Partie du second Chapitre est consacrée au mouvement d'un solide et aux formules de composition des vitesses et des accélérations dans le mouvement relatif. Les formules sont établies dans des cas simples; par exemple, l'accélération de Coriolis est calculée dans le cas où Oz est l'axe de rotation. Les propriétés classiques des mouvements plans, du centre instantané de rotation, des bases, roulantes et roulettes si fréquemment utilisées dans les mécanismes, les engrenages entre autres, sont très simplement établies. Là encore, l'Auteur propose de très nombreux exercices fort judicieusement choisis qui sont presque tous des applications pratiques, des calculs industriels bien plus que des problèmes de mathématiques.

Les principes de la Mécanique sont exposés au Chapitre III. La force appliquée à un point matériel en repos est regardée comme analogue à l'action qu'exercerait sur le point un fil élastique attaché au point, convenablement dirigé et tendu. Il en est de même des forces de liaison. On en déduit aisément la représentation des forces par des vecteurs. Quant aux principes mêmes, ils sont souvent envisagés comme étant suggérés par des expériences sur des fils tendus. La *masse* est définie à l'aide du *poids*. Le poids d'un corps varie avec le lieu d'observation, mais le rapport des poids de deux corps en un même lieu ne change pas avec ce lieu. A l'un des corps (Γ) de poids (Π) faisons correspondre le nombre 1, aux autres de poids p, p' p'', ..., en un même lieu des nombres m, m', m'', ..., tels qu'on ait

$$\frac{1}{\Pi} = \frac{m}{p} = \frac{m'}{p'} = \frac{m''}{p''} = \ldots,$$

les nombres m, m', m'', ... sont les nombres qui mesurent les masses des divers corps quand on prend la masse du corps (Γ) comme unité. L'Auteur insiste sur le choix des unités et le passage de l'un des deux systèmes couramment employés (*C. G. S.* et *système industriel*) à l'autre. Les principes de la Statique et de

la Dynamique sont exposés, nous l'avons dit, avec une remarquable netteté et toujours envisagés comme ayant une base expérimentale. Nous pensons qu'ainsi présentés ils n'offriront aucune difficulté à l'étudiant qui ne se doutera certes pas que, derrière cette simplicité apparente, se cachent de grosses difficultés, que ces principes ont été le fruit du labeur de nombreux siècles avant que le génie de Newton, utilisant les résultats de ses devanciers, ne les eût mis tout à fait au point et qu'enfin, ils sont encore aujourd'hui l'objet de fréquentes discussions. Le principe de l'inertie conduit aux équations générales de la Dynamique. Au sujet du *changement de repère*, M. Cotton indique l'introduction des forces fictives (correspondant à l'accélération d'entraînement et à celle de Coriolis) : *force centrifuge* et *force centrifuge composée* et dit que les deux forces sont pratiquement négligeables vis-à-vis des autres quand on passe du repère théorique au repère industriel (le premier est le trièdre absolu des astronomes, le second est le sol). Peut-être serait-il bon d'insister un peu sur ce point, d'autant plus que c'est toujours une question délicate de savoir dans une équation ce qu'on peut négliger et qui embarrasse toujours les débutants. De plus, ces étudiants ne sont pas sans avoir entendu parler du pendule de Foucault, par exemple, où les forces fictives ne sauraient évidemment être négligées. Dans l'étude des mécanismes, en général, ces forces fictives sont négligeables, mais celles-ci ne sont pas toujours, dans toutes les questions de Mécanique, pratiquement négligeables. La phrase citée du texte (p. 104) devrait au moins être précédée des mots *en général* ou *le plus souvent*.

Dans la Statique qui est l'objet du Chapitre IV, M. Cotton recommande aux étudiants les méthodes graphiques qui donnent, en général, une approximation largement suffisante. Les premiers principes de la Statique graphique dont l'étude est poussée jusqu'à la recherche des forces dans les systèmes triangulés répondent à ce but. Depuis quelque temps, les méthodes graphiques sont de jour en jour plus employées et il est certain que ces premiers principes de Statique graphique orienteront très heureusement l'étudiant vers des méthodes qui sont aujourd'hui couramment utilisées par les ingénieurs et les praticiens de toute nature.

Les conditions d'équilibre du point libre ou gêné, celles du

solide, la réduction des différents systèmes simples de forces sont brièvement traitées et précèdent les éléments de Statique graphique. Là, comme ailleurs, M. Cotton est resté très bref; l'étudiant sentira lui-même que, la plupart du temps, il est possible de développer beaucoup plus les idées exposées, d'aller beaucoup plus loin que l'Auteur ne l'a fait dans son Cours qui, à ce point de vue, ne manquera pas de disposer le lecteur à des études plus approfondies et plus complètes pour lesquelles ils se sentira très bien préparé.

A l'étude de l'équilibre du corps solide assujetti à certaines liaisons habituellement rencontrées dans la pratique, succède un paragraphe relatif au frottement. L'Auteur donne les lois de frottement au repos, puis cherche les conditions d'équilibre du corps solide en contact avec certaines surfaces dans l'hypothèse où le frottement n'est pas négligeable. Il traite quelques exemples empruntés aux mécanismes.

Les systèmes déformables étant très employés dans les constructions, M. Cotton leur consacre un paragraphe. Il rappelle d'abord le *principe de solidification* qui est à la base de la statique du corps solide et indique comment, *en subdivisant le système en systèmes partiels*, ce même principe conduit à de nouvelles équations qui permettent de déterminer les forces agissant sur les différentes parties. Cette méthode est appliquée aux polygones funiculaires, aux systèmes triangulés et enfin à l'équilibre des fils inextensibles.

Quant à la forme même de l'Ouvrage, elle est exempte de toute critique. M. Cotton s'est interdit, avec un soin méticuleux, toute liberté de langage, distinguant bien dans les énoncés une grandeur et le nombre qui la mesure, évitant toute faute de français. Et ceci mérite d'être signalé à une époque où nombre d'auteurs écrivent d'une manière souvent fort incorrecte et semblent croire que les Mathématiques s'en accommodent très bien.

L'Ouvrage sera complété par un second fascicule consacré au Travail, à la Dynamique du point et des systèmes; l'Auteur a trouvé naturel de rapprocher le principe des travaux virtuels du principe des forces vives qui seront tous deux exposés dans cette seconde partie du Cours.

Si élémentaire qu'il puisse paraître, ce Cours de Mécanique

générale rendra, croyons-nous, les plus grands services à toutes les personnes désireuses d'être initiées à la Mécanique sans pouvoir cependant acquérir au préalable les notions mathématiques indispensables à la lecture et à la compréhension d'un traité de Mécanique rationnelle. Il peut servir de base à l'enseignement préparatoire aux écoles pratiques industrielles d'électricité, d'électrochimie, etc., qui sont destinées à former des ingénieurs qui soient avant tout des praticiens. Il a sa place marquée, non seulement dans la bibliothèque de l'Ingénieur et de l'Élève-ingénieur, mais dans les bibliothèques des praticiens désireux de rafraîchir de temps en temps leurs souvenirs théoriques, dans celles des lycées également où il serait souhaitable que le professeur de Mécanique, au lieu de chercher dans cette science des applications du cours d'Algèbre ou d'Analyse, orientât son enseignement vers un but pratique et le rendît plus directement applicable aux problèmes que pose la pratique industrielle.

GASTON COTTY.

MÉLANGES.

UN TRAVAIL DE JEAN MERLIN SUR LES NOMBRES PREMIERS.

Avec tant d'autres admirables jeunes gens, sur lesquels la Science de notre pays était en droit de compter et dont la fin brutale nous atteint à la fois comme Français et comme savants, Jean Merlin, aide-astronome à l'Observatoire de Lyon, est tombé au champ d'honneur.

D'autres retraceront, mieux que je ne saurais le faire, cette vie dont la fin glorieuse ne dément pas le laborieux commencement. Merlin fut un modeste, qui eut comme la pudeur de son talent. Étranger à toute pensée d'ambition personnelle, il fut uniquement possédé de ce double désir : avancer dans la Science et la faire avancer à son tour; la servir en un mot, à son rang, comme, finalement, il a servi la Patrie.

N'est-ce pas sous une telle inspiration de désintéressement et d'idéal qu'il s'adonna, sans pouvoir en attendre aucun avantage professionnel, à la branche la plus élevée des Mathématiques pures, je veux dire l'Arithme-

tique ? C'est ainsi qu'il m'avait, il y a trois ou quatre ans, communiqué un essai de démonstration du célèbre théorème de Goldbach : « Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers. »

Cette démonstration présentait une lacune, et c'est la raison pour laquelle elle n'a pas été publiée. Cependant, il ne me paraît nullement démontré que la méthode si originale et si intéressante de Merlin ne soit pas susceptible de mener au but. Autant qu'un jugement de cette nature est possible à l'avance, on peut espérer la compléter un jour. Le principe me paraît, en tout cas, devoir en être retenu : je ne me crois pas le droit de le laisser ignorer à ceux qui s'intéressent à ce genre de recherches.

J'analyserai donc succinctement, ci-dessous, le travail de Merlin. Les parties imprimées en grand caractère sont citées textuellement (à quelques détails de notation près) d'après le Mémoire.

J. H.

I.

Le principe de la méthode employée par Merlin n'est autre que le « crible d'Ératosthène » lui-même.

Soit A un entier. Soient $p_1 = 2, p_2, \ldots, p_n$ les nombres premiers égaux ou inférieurs à $\sqrt{A}$, avec

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_n.$$

On sait qu'on obtient tous les nombres premiers $\leq A$ en effaçant de l'intervalle $(0, A)$ tous les nombres de la forme

$$(1) \qquad x p_i,$$

où $i = 1, 2, \ldots, n$, et x est un entier quelconque. Dans la terminologie de Merlin, ceci s'appellera un *crible d'Ératosthène d'origine* 0.

Effaçons également, du même intervalle, tous les nombres de la forme

$$(1') \qquad A + x p_i,$$

i prenant encore toutes les valeurs $1, 2, \ldots, n$ et x étant encore un entier arbitraire (visiblement négatif, cette fois). C'est ce qu'on appellera un *crible d'Ératosthène d'origine* A.

Tout entier de l'intervalle $(0, A)$ *qui n'appartiendra à aucune des progressions arithmétiques* (1), (1') *sera à la fois de la forme* P *et* $A - P'$ (les nombres P, P' étant premiers) et, par conséquent, *fournira la décomposition dont le théorème de Goldbach affirme l'existence.*

2. Pour évaluer le nombre des termes effacés, il convient, bien

entendu, de tenir compte des nombres qui appartiennent à la fois à plusieurs des progressions précédentes, afin de ne pas les compter plusieurs fois.

Je dis que deux progressions $ax+b$, $a'x+b'$ *interfèrent*, lorsqu'il existe des nombres communs à ces deux progressions; j'appelle ces nombres communs des *interférences*.

Pour que deux progressions $ax+b$, $a'x+b'$ interfèrent, il faut et il suffit que le plus grand commun diviseur de a et de a divise $(b'-b)$. Lorsqu'il en est ainsi, la raison des interférences est le plus petit commun multiple de a et de a'.

Pour que plusieurs progressions

$$(2) \qquad a_1x+b_1, \quad a_2x+b_2, \quad \ldots, \quad a_nx+b_n,$$

aient un point d'interférence commun (elles en ont alors une infinité), il faut et il suffit que ces progressions interfèrent deux à deux. La raison des interférences communes est le plus petit commun multiple des nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

. . . . . .

Supposons en particulier que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ soient premiers entre eux deux à deux. Alors, les progressions (2) ont toujours une interférence commune à chacune d'elles.

3. Considérons la suite des termes de la $n^{\text{ième}}$ progression

$$b_n+a_nx,$$

et le système d'interférences I_1 produites sur cette suite de termes par chacune des $n-1$ autres progressions

$$b_1+a_1x, \quad b_2+a_2x, \quad \ldots, \quad b_{n-1}+a_{n-1}x.$$

La configuration ainsi obtenue sera identique [1] à celle formée par les interférences I_2 de $n-1$ progressions

$$b'_1+a_1x, \quad b'_2+a_2x, \quad \ldots, \quad b'_{n-1}+a_{n-1}x,$$

sur la suite des nombres entiers.

---

[1] Ceci signifie que (les nombres b' étant convenablement choisis) les valeurs qu'il faut donner à x, dans l'expression (2), pour obtenir les interférences I_1, sont précisément les nombres donnés par les interférences I_2. (J. H.)

4. En particulier, lorsque les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des nombres premiers différents, les progressions (2) ont toujours un point d'interférence commune.

II.

Démonstration d'un théorème.

5. Suivant l'usage, je désigne par p_n le $n^{\text{ième}}$ des nombres premiers rangés par ordre de grandeur croissante, en posant $p_1 = 2$.

$[x]$ désigne le plus grand entier non supérieur à x.

J'appelle $\Lambda(b, a)$ l'opération qui consiste à effacer dans le tableau T des nombres entiers positifs et négatifs les nombres de a en a à partir de b, dans le sens des entiers croissants comme dans celui des entiers décroissants. Généralement, on aura

$$0 \leqq b < a.$$

Cette opération consiste donc à effacer dans T tous les nombres de la progression $ax + b$.

Considérons une progression $r_1 + p_1 x$ relative au nombre premier $p_1 = 2$, et, pour les nombres premiers p_i autres que 2, simultanément deux progressions telles que

$$r_i^{(0)} + p_i x, \quad r_i^{(1)} + p_i x$$

avec $0 \leqq r_i^{(0)} < p_i$, $0 \leqq r_i^{(1)} < p_i$, qui, naturellement, n'interfèrent pas.

On fait, dans l'intervalle des A premiers nombres, les opérations

$$(\Lambda) \qquad \begin{cases} \Lambda(r_1, p_1), & \\ \Lambda(r_2^{0}, p_2), & \Lambda(r_2^{1}, p_2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Lambda(r_n^{0}, p_n), & \Lambda(r_n^{(1)}, p_n). \end{cases}$$

Le théorème que je veux démontrer est le suivant :

Dans tout intervalle de longueur $\nu p_n \log p_n$, ν désignant une certaine constante, il y a au moins un nombre non effacé.

6. Je désignerai les différentes constantes que j'aurai à introduire par $\nu_1, \nu_2, \ldots$.

J'emploierai, suivant M. Landau, la notation

$$f(x) = O[g(x)],$$

pour indiquer que, $f(x)$ et $g(x)$ étant fonctions de x (la fonction g étant positive), on a

$$\lim_{x=+\infty} \sup. \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty.$$

Je me servirai des formules

$$(2) \quad \sum_{p=p_1}^{p=p_n} \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n} = \log\log p_n + \nu_1 + O\left(\frac{1}{\log p_n}\right),$$

$$(3) \quad \begin{cases} \vartheta(p_n) = \log p_1 + \log p_2 + \ldots + \log p_n = p_n + O(p_n e^{-\sqrt[12]{\log p_n}}), \\ \Pi(p_n) = n = \dfrac{p_n}{\log p_n} + O\left(\dfrac{p_n}{\log^2 p_n}\right) \end{cases}$$

(Landau, *Verteilung der Primzahlen*, t. I, p. 102, 195, 196), $\pi(x)$ désignant le nombre des nombres premiers non supérieurs à x.

Enfin, j'aurai besoin d'une valeur approchée de chacune des deux expressions

$$u_n = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{2}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{p_n}\right),$$

$$v_n = \left(1 + \frac{1}{p_1}\right)\left(1 + \frac{2}{p_2}\right)\cdots\left(1 + \frac{2}{p_n}\right).$$

On trouve, à l'aide des formules qui viennent d'être rappelées,

$$(4) \quad \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{(\log p_n)^2 e^{2\nu_1 - \nu_2} e^{O\left(\frac{1}{\log p_n}\right)}}, \\ v_n = (\log p_n)^2 e^{2\nu_1 - \nu_2} e^{O\left(\frac{1}{\log p_n}\right)}. \end{cases}$$

7. Revenons maintenant au calcul du nombre B des termes que les opérations (A) effacent dans l'intervalle A, afin de rechercher si $A - B > 0$.

On est, comme il est bien connu, conduit, pour tenir compte des termes communs à plusieurs progressions et ne les effacer qu'une

seule fois, à écrire B sous la forme

$$B = A_1 + A_{2^{(0)}} + A_{2^{(1)}} + A_{3^{(0)}} + A_{3^{(1)}} - A_{12^{(0)}} - A_{12^{(1)}} - \ldots + \ldots$$
$$+ (-1)^{n+1} A_{12^{(0)}3^{(0)}\ldots n^{(0)}} + \ldots + (-1)^{n+1} A_{12^{(1)}3^{(1)}\ldots n^{(1)}},$$

$A_{i^{(\alpha)}j^{(\beta)}\ldots}$ désignant le nombre des termes suivant lesquels interfèrent, dans l'intervalle (0, A), les progressions

$$(5) \qquad r_{i^{(\alpha)}} + p_i x, \quad r_{j^{(\beta)}} + p_j x, \quad \ldots$$
$$(\alpha = 0, 1 ; \beta = 0, 1 ; i, j, \ldots = 1, 2, \ldots, n).$$

Or il est clair que, d'une manière générale, le nombre des termes de la progression

$$r + px$$

[celle-ci étant l'interférence des progressions (5)] contenus, dans un intervalle d'amplitude A est, *à une unité près*, représenté par $\frac{A}{p}$; il est de la forme

$$\frac{A + \theta}{p}$$

avec $|\theta| \leq 1$.

La quantité $A - B$ pourra donc s'exprimer par la somme

$$\sum\left(\pm \frac{A}{p}\right) + \sum\left(\pm \frac{\theta}{p}\right).$$

Nous désignerons respectivement [1] par (I) et (II) les deux parties $\sum \pm \frac{A}{p}$ et $\sum \pm \frac{\theta}{p}$ de la somme précédente.

8. Calculons d'abord (I).

Cette somme est égale à

$$A - \frac{A}{p_1} - \frac{2A}{p_2} - \frac{2A}{p_3} - \ldots - \frac{2A}{p_n} + \frac{2A}{p_1 p_2} + \frac{2A}{p_1 p_3} + \ldots$$
$$+ \frac{2A}{p_1 p_n} + \frac{2^2 A}{p_2 p_3} + \frac{2^2 A}{p_2 p_4} + \ldots + \frac{2^2 A}{p_{n-1} p_n} + \ldots + (-1)^n \frac{2^{n-1} A}{p_1 p_2 \ldots p_n}$$

ou

$$A\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{2}{p_2}\right)\left(1 - \frac{2}{p_3}\right)\ldots\left(1 - \frac{2}{p_n}\right).$$

---

[1] Nous adoptons ici une notation légèrement différente de celle de Merlin.

D'après (4), ce produit est égal à

$$(\mathrm{I}) \qquad \frac{A}{(\log p_n)^2 e^{2\gamma_1 - \gamma_2} e^{O\left(\frac{1}{\log p_n}\right)}}.$$

L'importance de la restriction de ne considérer qu'une seule progression $r_1 + p_1 x$ relative à $p_1 = 2$ apparaît ici [1]. Si nous considérions, relativement à $p_1 = 2$ comme pour les autres nombres premiers, deux progressions $r_{1^0} + xp_2$, $r_{1^0} + xp_1$, nous trouverions $(\mathrm{I}) = 0$.

9. Passons au calcul de la partie (II), c'est-à-dire de $\Sigma = \frac{\theta}{p}$.

Merlin la décompose elle-même de la manière suivante :

Soient r le plus petit terme de la progression $r + px$ contenu dans l'intervalle considéré et $A - \rho$ le plus grand terme de la même progression contenu dans cet intervalle. Le nombre total des termes en question sera $\frac{A - r - \rho}{p} + 1$.

Toutefois, cette expression sera en défaut lorsqu'il n'y aura aucun de ces termes; elle ne redeviendra exacte qu'en remplaçant le terme 1 par zéro, les quantités r et ρ étant, d'autre part, choisies par convention telles que $r + \rho = A$.

L'expression (II) sera donc, à son tour, la somme des deux parties

$$(\mathrm{II}') \qquad \Sigma = \frac{r + \rho}{p}$$

et

$$(\mathrm{II}'') \qquad \Sigma \mp \eta,$$

η étant égal à 1 ou à 0, suivant qu'un au moins des termes à énumérer existe, ou qu'il n'en existe aucun.

10. Contrairement à (I), on n'établira pas que (II') soit nécessai-

---

[1] Dans le théorème de Goldbach, l'hypothèse que le nombre à décomposer soit *pair* est évidemment essentielle.

Dans l'analyse de Merlin, c'est à ce point du raisonnement qu'elle intervient.

D'autres nombres premiers peuvent d'ailleurs se comporter comme p_1, c'est-à-dire ne correspondre qu'à une seule progression chacun : c'est le cas, dans la démonstration du théorème de Goldbach, pour tous ceux qui figurent en facteurs dans le nombre à décomposer. La rédaction du texte fait abstraction de cette circonstance, dont il est aisé de tenir compte. (J. H.)

rement positive; mais, dans le cas contraire, on obtiendra néanmoins une limite inférieure (négative) de cette expression.

Pour cela, il faut faire intervenir les destructions mutuelles des différents termes qui y figurent. Merlin y parvient en établissant entre eux une subordination qu'on peut exposer de la manière suivante :

Soient

$$r_{\alpha_1}^{(\varepsilon_1)} + p_{\alpha_1} x, \quad r_{\alpha_2}^{(\varepsilon_2)} + p_{\alpha_2} x, \quad \ldots, \quad r_{\alpha_i}^{(\varepsilon_i)} + p_{\alpha_i} x$$

les progressions dont l'interférence sert à définir un terme de (II') (les ε étant tous égaux à 0 ou à 1 et les p_α étant tous distincts, puisque deux progressions de même raison n'interfèrent pas). Il est d'abord clair que le nombre i de ces progressions, qui sera dit le *rang* du terme, fait connaître le signe de ce terme [toujours contraire à celui du terme correspondant de (I), soit $(-1)^{i+1}$] et que le dénominateur du même terme est le produit

$$P = p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_i}.$$

On va convenir, en premier lieu, de ranger ces progressions par ordre de raison croissante (de sorte que $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_i$).

Ceci fait, si l'on supprime la dernière d'entre elles, les progressions restantes définissent un autre terme de (II'), qu'on peut appeler l'*antécédent* du premier, lequel en sera dit le *conséquent*.

On voit que :

1° Dans tous les cas, on a

$$r + \rho = A;$$

2° Tout terme de (II') (sauf ceux de rang 1) a un antécédent unique, tandis qu'il a plusieurs conséquents (sauf si $i = n$, auquel cas il n'y en a aucun);

3° L'antécédent et le conséquent sont toujours de signes contraires;

4° Le dénominateur de l'antécédent divise celui du conséquent;

5° *Le numérateur* $(r' + \rho')$ *d'un conséquent est toujours au moins égal au numérateur* $r + \rho$ *de son antécédent*, d'après la manière dont r et ρ ont été définis.

Si donc T est un terme de rang i figurant dans (II'), l'un quelconque de ses conséquents sera de la forme

$$T' = -T \frac{R}{p_{\alpha_{i+1}}},$$

R étant un nombre (en général fractionnaire) au moins égal à 1.

11. Cela posé, mettons d'abord à part, dans l'expression (II'), les termes de rang 1, lesquels sont tous positifs.

Dans ce qui reste, nous associerons à tout terme T dont le rang i est *pair*, l'ensemble de ses conséquents T'. La somme algébrique ainsi constituée est, d'après ce qui précède, de la forme

$$(6)\qquad T + \Sigma T' = -\frac{r+\rho}{p} + \sum \frac{r'+\rho'}{p \cdot p_{\alpha_{i+1}}} = (-T)\left(-1 + \sum \frac{R}{p_{\alpha_{i+1}}}\right),$$

avec

$$(-T) > 0, \qquad \alpha_{i+1} > \alpha_i, \qquad R \geqq 1.$$

Pour trouver une limite inférieure de l'une quelconque des expressions précédentes, voyons à quelle condition la parenthèse qui multiplie (— T) est sûrement positive.

Dans cette parenthèse, la somme Σ est étendue à tous les indices α_{i+1} tels que

$$\alpha_i + 1 \leqq \alpha_{i+1} \leqq n.$$

Chacun de ces indices fournit d'ailleurs deux termes de cette somme. Celle-ci sera donc supérieure à 1 si

$$-1 + 2\left(\frac{1}{p_{\alpha_i+1}} + \frac{1}{p_{\alpha_i+2}} + \ldots + \frac{1}{p_n}\right) > 0.$$

D'après les formules précédemment rappelées, cette condition peut s'écrire

$$(7)\qquad -1 + 2\left[\log\log p_n + \nu_1 + O\left(\frac{1}{\log p_n}\right) - \log\log p_{\alpha_i} - \nu_1 - O\left(\frac{1}{\log p_{\alpha_i}}\right)\right] > 0.$$

$\frac{1}{\log p_{\alpha_i}}$ tendant vers 0 quand p_{α_i} croît indéfiniment, on peut prendre α_i assez grand pour que

$$2\left|O\left(\frac{1}{\log p_n}\right) - O\left(\frac{1}{\log p_{\alpha_i}}\right)\right| < \chi.$$

χ étant choisi aussi petit que l'on veut; et la condition (7) devient

$$1 - \chi - 2(\log\log p_n - \log\log p_{\alpha_i}) < 0,$$

c'est-à-dire

$$p_n > p_{\alpha_i}^{e^{\frac{1-\chi}{2}}}.$$

Soit p_α le plus petit nombre premier tel que

$$(8) \qquad p_{\alpha_i}^{e^{\frac{1-\chi}{2}}} \geqq p_n.$$

Tous les termes T tels que $\alpha_i \leqq \alpha$ donneront, dans la somme (II'), après le groupement qui vient d'être indiqué, des sommes partielles *positives*.

12. Occupons-nous maintenant des sommes partielles pour lesquelles $\alpha_i > \alpha$ (y compris celles pour lesquelles $\alpha_i = n$ et qui sont, par conséquent, réduites à leur premier terme) ou, du moins, de celles d'entre elles qui seront négatives.

Considérons une de ces sommes partielles; elle sera en valeur absolue inférieure à la somme obtenue en remplaçant : la parenthèse par 1; et, dans le premier facteur, p_{α_i} par $p_n^{e^{\frac{1-\chi}{2}}}$ [d'après (8)], et le numérateur par Λ (d'après la première remarque faite au n° 10). Cette somme partielle sera donc en valeur absolue inférieure à

$$(9) \qquad \frac{\Lambda}{p_n^{\frac{1}{\sqrt{e^{1-\chi}}}}} \frac{1}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{i-1}}} \qquad \left(\frac{1}{\sqrt{e^{1-\chi}}} = f < 1\right),$$

et d'ailleurs, χ étant arbitrairement petit, f est aussi voisin de $\frac{1}{\sqrt{e}}$ que l'on veut, pour α déterminé en fonction de χ.

En groupant, d'après la formule (2), toutes les sommes partielles correspondant à un même système des indices inférieurs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i$, on obtient une deuxième somme partielle dont la valeur absolue est inférieure à

$$\frac{\Lambda}{p_n^f} \frac{2^i}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{i-1}}} \quad \text{ou a} \quad \frac{\Lambda}{p_n^f} \frac{2^{i-1}}{p_{\alpha_1} p_{\alpha_2} \cdots p_{\alpha_{i-1}}},$$

suivant que le dénominateur du second facteur ne contient pas ou contient p_1.

En faisant varier, de toutes les façons possibles, ce système d'indices inférieurs, on obtient par le groupement considéré des termes de rang i et de rang $i+1$, une somme dont la valeur

absolue est inférieure à

$$\frac{A}{p_n^f}\sum{}^{1}\frac{2^{i-1+\nu_1^0}}{p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}\cdots p_{\alpha_{i-1}}},$$

la somme Σ s'étendant à toutes les permutations $i-1$ à $i-1$ des lettres $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$, et 0 ou 1 devant être choisis dans l'accolade suivant que le dénominateur correspondant contient ou ne contient pas p_1.

Or il est clair que le facteur de $\frac{A}{p_n^f}$ est inférieur à

$$\left(1+\frac{1}{p_1}\right)\left(1+\frac{2}{p_2}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{p_n}\right)=c_n.$$

D'après l'évaluation indiquée plus haut pour cette dernière quantité, la partie restante de (II') (celle qui correspond à $\alpha_i > \alpha$) est inférieure en valeur absolue à

$$\frac{A}{p_n^f}(\log p_n)^2 e^{2\nu_1+\nu_3+1}.$$

Elle est donc d'ordre de grandeur visiblement inférieur à celui de la quantité (I).

13. Il resterait à s'occuper de l'expression (III').

C'est pour cette dernière que Merlin n'obtient pas d'évaluation satisfaisante.

III.

14. L'application du théorème principal, supposé démontré, au théorème de Goldbach, est immédiate.

Soit $2l$ un nombre pair. Construisons les deux cribles d'Ératosthène d'origines 0 et $2l$ jusqu'au plus grand nombre premier contenu dans $\sqrt{2l}$; le théorème en question veut qu'il y ait au moins un nombre non effacé entre 0 et $2l$.

Or nous avons vu [1] au n° 1 que cette construction est précisément celle qui est étudiée dans le paragraphe II. Soit p_n le plus

---

[1] On doit tenir compte de la remarque finale du n° 8 (*voir* page 127, note). (J. H.)

grand nombre premier contenu dans $\sqrt{2l}$; il est démontré dans ce paragraphe que, dans tout intervalle de longueur au moins égale à $\nu p_n \log p_n$, il y a au moins un nombre non effacé. Il en sera donc ainsi dans l'intervalle de 0 à $2l$. Toutefois il faudra, pour qu'il en soit sûrement ainsi, que

$$\nu \sqrt{2l} \log \sqrt{2l} < 2l,$$

inégalité toujours vérifiée à partir d'une certaine valeur de $2l$.

Pour pouvoir énoncer le théorème dans toute sa généralité, il y aurait donc lieu d'entreprendre une vérification numérique pour les premières valeurs de l.

On peut obtenir, par la formule du n° 8, une limite inférieure du nombre de manières dont un nombre pair est décomposable en une somme de deux nombres premiers. En effet, ce nombre de manières est au moins égal à la moitié du nombre de nombres non effacés de 0 à $2l$ quand on construit les deux cribles d'Ératosthène que nous venons de considérer. Nous aurons une limite inférieure de ce dernier nombre en faisant $A = p_n^2$ dans le second membre de la formule (1) du n° 8.

La limite inférieure que nous obtenons ainsi est asymptotique à

$$\frac{1}{2} \frac{\nu p_n^2}{(\log p_n)^2 e^{2\nu_1 - \nu_2}}.$$

15. *Applications diverses.* — Merlin indique une série d'autres questions délicates susceptibles d'être résolues par les mêmes moyens.

C'est ainsi qu'on peut se demander si l'on trouve indéfiniment des couples de nombres premiers différant entre eux de deux unités seulement.

Nous nous proposons de chercher s'il existe une infinité de valeurs de n telles que

$$p_{n+1} - p_n = 2.$$

Dans la construction du crible d'Ératosthène, on effectue successivement les opérations

$$A(0, p_1), \quad A(0, p_2), \quad \ldots, \quad A(0, p_n).$$

Effectuons d'abord les deux premières opérations $A(0, p_1)$, $A(0, p_2)$. Il ne reste plus non barrés que tous les nombres de la forme $6m \pm 1$. Soit T′ le tableau ainsi formé.

Je fais correspondre à chaque nombre $6m \pm 1$ non barré du tableau T′ le nombre m du tableau T des nombres entiers positifs et négatifs; de sorte qu'à un nombre m de T correspondent deux nombres de T′.

Continuons maintenant sur T′ la formation du crible d'Ératosthène, en barrant dans le tableau T les nombres correspondants des nombres que nous barrons dans le tableau T′.

En faisant l'opération $A(0, p_3)$, nous barrons dans T′ tous les nombres $5(6n \pm 1)$, ou

$$(6.1 - 1)(6n \pm 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

En faisant l'opération $A(0, p_4)$, nous barrons, dans T′, tous les nombres

$$7(6n \pm 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

ou

$$(6.1 + 1)(6n \pm 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad \ldots.$$

Arrêtons-nous après l'opération $A(0, p_k)$ et soit, d'ailleurs,

$$p_k = 6l + \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_1 = \pm 1;$$

à ce moment nous avons barré, dans T′, tous les nombres

$$(6m \pm 1)(6n \pm 1) \qquad (m = 1, 2, \ldots, l - 1;\ n = 1, 2, \ldots),$$
$$(6l - 1)(6n \pm 1) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

si $\varepsilon_1 = -1$; et tous les nombres

$$(6m \pm 1)(6n \pm 1) \qquad (m = 1, 2, \ldots, l;\ n = 1, 2, \ldots),$$

si $\varepsilon_1 = +1$.

Quels sont les nombres du tableau T que nous avons barrés en même temps?

$$(6m \pm 1)(6n \pm 1) = 6(mn - \varepsilon m + \varepsilon' n) + \varepsilon\varepsilon' \qquad \begin{cases} \varepsilon = \pm 1, \\ \varepsilon' = \pm 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire que nous avons barré dans T tous les nombres de la forme

$$6mn + \varepsilon m + \varepsilon' n \qquad (m = 1, 2, \ldots, l - 1;\ n = 1, 2, \ldots),$$
$$6ln - n + \varepsilon l \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

si $\varepsilon_1 = -1$, et tous les nombres de la forme

$$6mn + \varepsilon m + \varepsilon' n \qquad (m = 1, 2, \ldots, l;\ n = 1, 2, \ldots),$$

si $\varepsilon_1 = +1$.

A chaque nombre non barré de T correspond un couple de nombres $6m - 1$, $6m + 1$ non barrés de T'. Comme $p_k = 6l + \varepsilon_1$, le premier nombre de T que l'on barrera en faisant l'opération $A(0, p_{k+1})$ sera au moins

$$\frac{(6l+1)^2 - 1}{6} = 2l(3l+1).$$

Si donc, après la $k^{\text{ième}}$ opération, il y a des nombres de T non barrés supérieurs à l et inférieurs à $6l^2 + 2l$, il y aura, après pk, un couple de nombres premiers tels que p_n et $p_n + 2$. Il en sera toujours ainsi et, par conséquent, il y aura une infinité de valeurs de n telles que $p_{n+1} = p_n + 2$ si, entre l et $2l(3l+1)$, il y a au moins un nombre qui n'est d'aucune des formes

$$6mn + \varepsilon m + \varepsilon' n \qquad (m = 1, 2, \ldots, l;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Merlin démontre que l'existence d'un tel nombre se ramène bien au théorème général énoncé ci-dessus.

16. Une méthode toute semblable est appliquée par lui à la démonstration :

De l'existence d'une infinité de valeurs de n telles que

$$p_{n+1} - p_n = 1;$$

De l'existence d'une infinité de valeurs de n telles que l'on ait à la fois

$$p_{n+1} - p_n = 2, \qquad p_{n+2} - p_{n+1} = 1.$$

17. *Plus généralement*, on peut se proposer de résoudre en nombres *premiers* l'équation indéterminée du premier degré à deux inconnues x, y.

Soit

$$(10) \qquad ax + by = c$$

l'équation en question ; nous supposons a, b, c premiers entre eux deux à deux.

Supposons d'abord a et b positifs.

Considérons les deux progressions

$$(11) \qquad ax$$

et

$$(11') \qquad c - by.$$

D'après le n° 2, elles ont une infinité d'interférences communes formant une progression arithmétique de raison

$$(12) \qquad ab,$$

qui donnent les solutions de l'équation (10).

Pour trouver les solutions en nombres premiers de l'équation (10), il faut d'abord effacer les termes de la progression (11) à partir de 0 de 2 en 2, de 3 en 3, de 5 en 5, ..., de p_n en p_n, p_n désignant le plus grand nombre premier non supérieur à $\sqrt{\frac{c}{a}}$.

Puis il faut effacer les termes de (11') à partir de c de 2 en 2, de 3 en 3, de 5 en 5, ..., de p_m en p_m, p_m désignant le plus grand nombre premier non supérieur à $\sqrt{\frac{c}{b}}$.

Les termes de la progression (12) qui n'auront pas été effacés entre zéro et c donneront les solutions cherchées.

Appelons A_1 l'ensemble des opérations que nous venons de définir relativement à la progression ax.

Appelons B_1 l'ensemble des opérations que nous venons de définir relativement à la progression $c - by$.

Appelons A'_1 l'ensemble des opérations qui constituent A_1, sauf celles relatives aux nombres premiers facteurs de b; A'_2 l'ensemble des mêmes opérations A'_1, mais effectuées sur la suite des nombres entiers.

Appelons B'_1 l'ensemble des opérations qui constituent B_1, sauf celles relatives aux nombres premiers facteurs de a; B'_2 l'ensemble des mêmes opérations B'_1, mais effectuées sur la suite des nombres entiers, et l'origine étant $\left[\frac{c}{b}\right]$.

Les opérations A'_1, ne contenant que des progressions dont la raison est première avec b, forment, d'après le n° 3, sur la pro-

gression (12), une configuration identique à celle produite par les opérations A'_2 sur un certain intervalle I_1 de longueur $\left[\frac{c}{ab}\right]$.

Les opérations B'_1 ne contenant que des progressions dont la raison est première avec a, forment, d'après le n° 3, sur la progression (12), une configuration identique à celle produite par les opérations B'_2 sur un certain intervalle I_2 de longueur $\left[\frac{c}{ab}\right]$.

Pour obtenir la configuration produite sur la progression (12) par les opérations A'_1 et B'_1 faites simultanément, il suffit d'amener les intervalles I_1 et I_2 à coïncider en déplaçant convenablement l'origine des opérations B'_2, par exemple.

On constate d'ailleurs que les facteurs premiers qui figurent dans a et dans b sont sans effet.

Bien entendu, il faut encore que les opérations A et B ne fassent intervenir qu'*une seule* et même progression de raison 2. Ceci correspond à une restriction évidente nécessaire pour la possibilité de l'équation (10) en nombres premiers (le cas de x ou $y = 2$ excepté). Il est clair que c doit être pair si a et b sont tous deux impairs, impair dans le cas contraire.

La méthode ainsi développée permettrait, on le voit, la résolution en nombres premiers du problème de l'analyse indéterminée du premier degré.

18. *Généralisation.* — Ajoutons que, à la fin du Mémoire, l'Auteur indique comment on pourrait appliquer la même marche à un plus grand nombre de progressions en substituant aux nombres premiers des systèmes de nombres premiers entre eux deux à deux.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Bigourdan (G.). — *Petit Atlas céleste* contenant 5 cartes en deux couleurs, précédé d'une introduction sur les Constellations, sur les moyens de les reconnaître, etc. Brochure in-8 de 59 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915. Prix : 2fr,75.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

OPERE MATEMATICHE DI LUIGI CREMONA. *Tomo Secondo con fototipia del monumento eretto all. Autore nella R. Scuola d'Applicazione per gli Ingegneri di Roma.* 1 vol. in-4°, 451 pages. Milan, Ulrico Hoepli, 1915.

Au moment où nous venions de terminer le compte rendu du Tome I des OEuvres de Cremona, nous recevions ce second Volume dont l'apparition nous présage la terminaison prochaine de l'œuvre entreprise par M. Hoepli sous les auspices de l'Académie royale des Lincei. En relisant les Mémoires qui le composent, nous nous sommes reportés aux temps de notre jeunesse où Chasles, Cayley, Clebsch, Cremona et bien d'autres poursuivaient d'un commun accord ces études géométriques que l'on néglige si complètement aujourd'hui et que l'on a bien tort de négliger. La part de Cremona a été grande, et l'on retrouvera ici grand nombre d'écrits où il a énoncé et démontré, par les méthodes les plus simples, les propositions les plus dignes d'intérêt. Nous citerons en particulier un grand nombre de Mémoires sur les cubiques gauches, sur les surfaces réglées, sur les coniques, sur la surface de Steiner, sur l'hypocycloïde à trois rebroussements, sur les hyperboloïdes de révolution qui contiennent une cubique gauche donnée, etc. Cremona a dit aussi son mot, et nous le retrouvons ici, sur cette théorie des caractéristiques des systèmes de coniques que Chasles avait créée dans l'âge le plus avancé et qui a donné naissance à tant d'écrits publiés dans les *Comptes rendus* de notre Académie. Tout cela mérite l'attention et la lecture des géomètres; mais les deux morceaux qui nous paraissent devoir attirer surtout l'attention dans le nouveau Volume sont, d'une part, les deux Notes sur les transformations birationnelles des figures planes, où se trouve exposée la découverte capitale de Cremona, et, d'autre part, les *Preliminari di una teoria geometrica delle superficie*, écrit didactique de 140 pages in-4° faisant suite à l'essai analogue que l'Auteur avait publié sur la théorie des courbes planes.

G. DARBOUX.

KAMPÉ DE FÉRIET. — SUR LES FONCTIONS HYPERSPHÉRIQUES. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques,* soutenue le 24 avril 1915 sous la présidence de M. Paul APPELL. 1 vol. in-4, VII-111 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915.

La question traitée par M. Kampé de Fériet se rapporte à un sujet étudié presque exclusivement par des géomètres français. La théorie des fonctions sphériques, due à Laplace et à Legendre, a été généralisée par Hermite ([1]) par des considérations purement algébriques et indépendantes de la théorie du potentiel. En suivant une voie ouverte par M. Appell ([2]), M. Kampé de Fériet rattache la théorie purement algébrique d'Hermite et les généralisations dues à Didon, à l'ensemble déjà imposant des recherches sur les fonctions harmoniques à un nombre quelconque de variables. Il obtient ainsi des formules très générales, d'un caractère intuitif, qui placent la question sur son véritable terrain.

Dans le premier Chapitre se trouvent rappelées des généralités sur les fonctions harmoniques; l'Auteur y donne, en outre, l'expression qui nous paraît nouvelle et qui, dans tous les cas, est obtenue par une méthode nouvelle de $\Delta_2 F$ dans un système de coordonnées curvilignes de l'hyperespace non orthogonales.

Dans le second Chapitre, l'Auteur étudie la première classe des polynomes V d'Hermite et en donne, par une méthode générale et nouvelle, l'expression tirée des formules de la théorie du potentiel; il établit les propriétés les plus importantes de ces polynomes, en se plaçant au plus haut degré de généralité possible.

Dans le troisième Chapitre, l'Auteur montre la nécessité d'adjoindre aux polynomes V une nouvelle classe de polynomes U pour obtenir le développement d'une fonction hypersphérique quelconque. Il donne la définition, l'expression générale et les propriétés essentielles de ces polynomes U, toujours d'après les mêmes méthodes générales.

Dans le quatrième Chapitre, l'Auteur étudie le développement d'une fonction arbitraire de n variables en série de polynomes

---

([1]) *Œuvres*, t. II, p. 319-346.

([2]) *Comptes rendus*, t. CLVI, 1er semestre 1913, p. 1423 et 1852.

hypersphériques *zonaux*. Il y aura là, pour lui, un champ considérable de recherches qu'il se propose de développer plus tard.

Enfin, dans un dernier Chapitre, M. Kampé de Fériet introduit des fonctions qui sont, aux polynomes V et U, ce que les harmoniques tesséraux sont aux polynomes zonaux de la théorie élémentaire.

Parmi les instruments analytiques employés se trouve une généralisation de la formule de Lagrange à plusieurs variables, qui est différente de la généralisation d'Hermite et qui se rattache à une forme donnée par M. Darboux. Depuis la soutenance de sa Thèse, M. Kampé de Fériet a donné une nouvelle généralisation de cette formule dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 26 avril 1915).

La R.

COFFIN (J.-G.). — CALCUL VECTORIEL, *avec Applications aux Mathématiques et à la Physique*. Traduction et notation française par ALEX. VÉRONNET. Avec une Lettre au traducteur par PAUL APPELL. 1 vol. in-8, XXXIII-212 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

Un grand nombre d'Ouvrages ont été déjà consacrés au Calcul vectoriel et à ses nombreuses applications. En dresser la liste [1] serait fort long; il y en a, peut-on dire, pour tous les goûts. Les uns, théoriques, atteignent les plus hauts sommets de la Science en mettant plus spécialement en évidence, soit la théorie des quaternions, soit les diverses théories physiques d'Électricité, de Magnétisme, d'Optique, d'Hydrodynamique, de Mécanique des solides, de Dynamique des corpuscules électrisés ou non; d'autres, plus élémentaires, sont écrits pour les étudiants et tout à fait classiques; enfin les traités d'Algèbre, de Géométrie et de Mécanique renferment tous un Chapitre plus ou moins développé, consacré à la théorie des vecteurs. Et même, la difficulté qu'on rencontre le plus souvent aujourd'hui dans l'étude de ces questions vient de ce que les notations (et en résumé, le calcul vectoriel est-il

---

[1] Une liste détaillée des Ouvrages sur les quaternions se trouve dans la *Bibliography* du professeur Macfarlane, publiée par l'Association for the promotion of the study of quaternions and allied mathematics (Dublin, 1904).

autre chose qu'une simple notation bien plus qu'une méthode nouvelle?) sont très nombreuses; on ne sait lesquelles adopter, différents systèmes ayant été imposés par des savants distingués pour des raisons logiques et présentant tous certains avantages qui, autant que la personnalité de leurs inventeurs, empêchent de les rejeter.

Il semble donc qu'un nouvel Ouvrage sur les vecteurs ne s'imposait nullement. Malgré cela, les étudiants français doivent être heureux de l'excellente idée qu'a eue M. Véronnet de traduire le manuel nouveau de Calcul vectoriel du professeur G. Coffin. Ce manuel « donne, dit M. Appell, une excellente idée de ce Calcul, des avantages qu'il présente dans l'enseignement, de ses applications à la Géométrie et surtout à la Mécanique et à la Physique. D'ailleurs, écrit l'éminent mathématicien dans sa lettre au traducteur, votre notation très simple semble réduire au minimum les éléments nouveaux à introduire dans le Calcul. Elle me paraît conserver toute la clarté des formules algébriques sous une forme plus condensée, plus maniable, plus réelle aussi, en rendant la Mécanique plus géométrique et la Géométrie moins exclusivement algébrique ». Pratiquement, et c'est l'expression même de l'Auteur, ce Livre est un Cours élémentaire de Physique mathématique destiné à donner le goût de cette science et à éveiller le désir d'en poursuivre l'étude.

La méthode cartésienne, si prodigieusement féconde et qu'imposèrent surtout les travaux de Lagrange qui en mirent si bien en lumière les merveilleuses ressources, présente quelque chose d'artificiel. On n'obtient l'unité parfaite de toutes les opérations, de tous les calculs, on ne les ramène tous à des opérations sur des nombres, sur des grandeurs algébriques qu'après avoir décomposé la grandeur géométrique en trois morceaux : ses trois composantes suivant les axes. L'unité de la grandeur géométrique se trouve brisée. Voilà ce qui choque beaucoup de savants, en particulier les physiciens anglais et américains, ceux surtout qui tiennent en outre à *voir* les phénomènes au travers des calculs, comme Faraday voyait les lignes de force et suivait dans ses raisonnements leurs mouvements onduleux, les voyait dans ses calculs se condenser dans certaines régions de l'espace, avoir l'air de fuir certains corps, s'en éloigner, se raréfier dans certains endroits. L'emploi des quantités algébriques, des trois composantes de Descartes rend

difficile cette interprétation constante des équations; il faut arrêter son calcul ou plutôt les trois calculs relatifs aux trois composantes, reconstruire la grandeur géométrique brisée en trois pour avoir une vue réelle des choses. D'autre part, il serait absurde de nier l'avantage considérable que présente souvent la méthode cartésienne et de se priver systématiquement de son emploi. Les géomètres anglais du temps de Newton, qui raisonnaient toujours sur les grandeurs géométriques sans introduire d'axes, n'ont abouti qu'à des méthodes lourdes, sans élégance et sans portée suffisante. Concilier les avantages de la méthode cartésienne et ceux de la méthode vectorielle, voilà le but de l'Auteur. Que fallait-il pour l'atteindre ? Adopter une notation vectorielle qui permît sans cesse d'écrire, de traduire les équations vectorielles en langage cartésien. Ceci était relativement très facile dans l'état actuel de la Science.

L'étudiant qui connaîtra bien le Livre de M. G. Coffin, qui en aura lu attentivement le texte et qui aura fait les nombreux exercices très élémentaires, mais tout à fait appropriés aux Chapitres qu'ils suivent et judicieusement choisis pour faire mieux saisir les notions et les idées générales qui y sont exposées, sera familiarisé avec ce passage d'un langage à l'autre. Il aura acquis en outre un petit bagage de Physique mathématique élémentaire suffisant pour lui permettre d'en aborder l'étude plus complète dans la branche qu'il choisira et il sera à même de lire les Mémoires originaux, quelles que soient les méthodes choisies par les auteurs. Ceux-ci emploient de plus en plus, d'ailleurs, le Calcul vectoriel conçu, non pas comme une méthode nouvelle, à la manière d'Hamilton (dans les *quaternions*) ou de Grassmann (dans les *Ausdehnungslehre*), mais comme une méthode *auxiliaire*, une notation commode réunissant les avantages des quaternions et de l'analyse cartésienne. En France, les principaux travaux de Physique mathématique emploient surtout la méthode cartésienne, mais à l'étranger, la notation vectorielle est beaucoup plus couramment utilisée et il est indispensable d'être familiarisée avec elle pour aborder l'étude de la Physique, — pourrait-on concevoir cette étude non précédée de la lecture des œuvres de savants camme Lorentz, Gibbs, Haevesid, Bucherer, Bjerkness, Sommerfeld, Abraham et tant d'autres qu'il faudrait citer ?

La traduction de M. Véronnet est faite sur la seconde édition du *Vektoranalysis* de M. Coffin, la première édition de 1909 ayant été rapidement enlevée, ce qui témoigne du succès qu'eut l'Ouvrage dans les pays de langue anglaise. Cette seconde édition a permis à l'Auteur de corriger quelques fautes de détails, de rédiger à nouveau certaines parties et d'ajouter quelques Notes; bref, l'Ouvrage est tout à fait mis au point.

La première Partie est consacrée à un rapide exposé des principes fondamentaux du Calcul vectoriel et au choix des notations. Les Chapitres suivants, qui comprennent presque la moitié du Manuel, traitent des applications de l'Analyse à l'usage des débutants en Physique mathématique, comprenant Géométrie, Mécanique, Magnétisme, Électricité, Chaleur, Hydrodynamique. Évidemment, ce n'est pas un Traité complet, c'est plutôt une introduction à l'étude de la Physique; beaucoup d'applications intéressantes n'ont pu être traitées dans ce petit Ouvrage. Quant à la théorie si importante des courants alternatifs, l'Auteur l'a volontairement omise parce que, dit-il dans la Préface, les Ouvrages modernes sur ce sujet contiennent tous l'exposé de la méthode vectorielle employée.

La notation de M. Coffin était celle du physicien américain Willard Gibbs. D'ailleurs, les éléments essentiels de cette notation commencent à être à peu près universellement admis. En beaucoup de points, M. Véronnet, dans sa traduction, a adopté, en la simplifiant, la *notation française* de Massau.

Les vecteurs et les directions s'écrivent en lettres grasses, les grandeurs en lettres italiques. En cartésien, le vecteur se décompose en trois composantes suivant les trois directions $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. On a, pour la définition d'un vecteur $\mathbf{r}$, les formules

$$\mathbf{r} = r\mathbf{r}_1 = x\mathbf{x} + y\mathbf{y} + z\mathbf{z},$$

ce qui signifie que le vecteur $\mathbf{r}$ a une longueur r suivant la direction $\mathbf{r}_1$ ou qu'il se décompose en trois composantes de longueur x suivant la direction $\mathbf{x}$, y suivant la direction $\mathbf{y}$, z suivant la direction $\mathbf{z}$.

En général, les opérations faites sur les composantes $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ peuvent tout aussi bien se faire sur le vecteur $\mathbf{r}$ lui-même. Par exemple, si un point M se déplace, le vecteur $\mathbf{r}$, qui a pour origine

l'origine des coordonnées et pour extrémité le point M, varie; la vitesse du point est $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, son accélération est $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$, etc. Si les axes sont fixes, on a

$$d\mathbf{r} = \mathbf{x}\,dx + \mathbf{y}\,dy + \mathbf{z}\,dz, \qquad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{x}\frac{dx}{dt} + \mathbf{y}\frac{dy}{dt} + \mathbf{z}\frac{dz}{dt},$$

ce qui signifie que la variation $d\mathbf{r}$ de $\mathbf{r}$ a dx, dy, dz pour composantes suivant les axes.

Dans le premier Chapitre, l'Auteur définit les opérations élémentaires sur les vecteurs, la composition et l'intégration, et traite brièvement la Géométrie analytique de la droite et du plan avec la notation vectorielle. Le second Chapitre est consacré au *produit algébrique* et au *produit géométrique* de deux vecteurs. Le premier est un nombre algébrique égal à la somme des produits des composantes ou bien au produit d'un vecteur $\mathbf{a}$ par la composante parallèle de l'autre $\mathbf{b}$. Il est noté $\mathbf{ab}$. Faisons remarquer qu'il est écrit en lettres grasses, bien que ce ne soit pas un vecteur. Le *produit géométrique* de deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est un *vecteur* dont la direction n est normale au plan de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ et la longueur est égale au produit de l'un des vecteurs par la composante normale de l'autre. On le distingue du premier en le surmontant d'un trait horizontal; il est ainsi noté $\overline{\mathbf{ab}}$ (remarquons qu'il ne s'écrit pas de la même manière qu'un vecteur ordinaire). L'Auteur étudie les propriétés et les diverses formes analytiques de ces *produits* et quelques applications au mouvement des solides.

Les *produits algébriques et géométriques* comprenant plus de deux vecteurs sont définis dans le Chapitre III qui contient, en outre, diverses applications à la Géométrie analytique du plan, de la droite et de la sphère en Calcul vectoriel et à la réduction d'un système de forces, tout cela exposé très brièvement.

La différentiation des vecteurs est l'objet du Chapitre IV. En général, les différentiations des vecteurs se font comme dans le calcul algébrique. De très nombreuses applications à la Géométrie infinitésimale des courbes et des surfaces (tangente, normale, plan normal, courbure, torsion, lignes géodésiques des surfaces) et à la cinématique du point précèdent l'étude du problème inverse de la différentiation : l'intégration. Ces opérations fondamentales sont, croyons-nous, traitées beaucoup trop brièvement et d'une façon

insuffisante en plusieurs points. La continuité n'intervient jamais. La seule définition qu'on en trouve et que l'Auteur qualifie de *pratique* est la suivante : « Si nous passons d'un point de l'espace à un autre point de l'espace immédiatement voisin sans que la grandeur ni la direction de la fonction vectorielle n'éprouvent aucun changement brusque, la fonction vectorielle est appelée *fonction vectorielle continue* » (p. 8).

M. Coffin va même plus loin; il nie l'introduction des discontinuités en Physique mathématique : « Les fonctions qu'on rencontre en Physique sont presque toujours continues avec des valeurs uniques, sauf parfois en des points isolés ou sur des lignes ou des surfaces en nombre fini. Dans le cas contraire, on les ramène à jouir de ces propriétés par divers moyens, comme en insérant des diaphragmes qui empêchent de traverser une région suivant deux ou plusieurs trajectoires différentes, etc. Les fonctions étudiées dans la suite sont toutes supposées ainsi définies.... Toutes les fonctions naturelles étant continues, leur étude (celle des discontinuités) purement physique est inutile. » Ces lignes (p. 85) précèdent immédiatement l'étude des potentiels newtoniens et de leurs dérivées.... Elles font prévoir combien ce qui en est dit est insuffisant et laissent croire au lecteur non prévenu que ces potentiels ainsi que leurs dérivées premières et secondes sont tous et toujours des fonctions continues. Ceci est d'autant plus grave qu'on sait l'importance considérable des discontinuités de ces fonctions dans les solutions des problèmes de Physique mathématique. Il y a là une lacune, nous dirons même une erreur, impardonnable. Qu'on ne s'embarrasse pas de questions délicates relatives à la continuité dans un Ouvrage, même aussi complet que celui-ci, qui ébauche la plupart des grandes théories électriques comme celle de Maxwell, ou hydrodynamiques (celle des tourbillons, par exemple) et parle même de vecteurs à plus de trois dimensions..., on peut peut-être l'admettre; mais que le lecteur ne soit même pas prévenu de l'existence des discontinuités de certains potentiels et de certaines de leurs dérivées, pour ne parler ici que de ces fonctions très élémentaires, on ne peut l'accepter. De la considération des discontinuités des potentiels de volume de simple ou de double couche et de leurs dérivées premières et secondes dans certaines conditions, on déduit la solution d'un grand nombre de

problèmes de Physique mathématique. Évidemment, avec des « diaphragmes », on peut rendre toutes ces fonctions continues, mais c'est presque toujours leurs discontinuités qui les rendent intéressantes et aptes à fournir la solution des problèmes nombreux d'Électricité, d'Hydrodynamique, etc.

Si l'on s'astreint à ne pas envisager ces discontinuités, il ne suffit pas, en tout cas, d'affirmer la continuité des fonctions *naturelles* et de ne même pas prévenir l'étudiant de l'existence des sauts brusques de certaines fonctions très naturelles comme ΔV si longuement étudié par M. Coffin (qui n'étudie que des fonctions naturelles). ΔV n'en fait pas moins un saut brusque à la surface d'un conducteur électrisé par exemple. Ce saut joue un rôle fondamental dans toutes les branches de la Physique et l'Auteur est bien obligé d'en tenir compte dans la suite de l'Ouvrage.

Aux *opérateurs différentiels* est consacré un long Chapitre, le cinquième. On définit d'abord la *divergence* ou vecteur opérateur ∇ (delta renversé) ou $\mathbf{D}$. La conception de cet opérateur comme vecteur est, comme on le sait, très utile et l'Auteur en donne immédiatement de nombreuses applications. L'opérateur $\mathbf{s}_1\mathbf{D}$ correspond à la dérivée suivant une direction $\mathbf{s}_1$. Le *curl* ou *tourbillon* est défini comme on le fait ordinairement. Le théorème de la divergence est montré, plutôt que démontré, à l'aide de considérations intuitives relatives aux flux. L'Auteur dit bien qu'il ne donne pas de démonstration rigoureuse. Il a prévenu d'ailleurs dans la Préface que, « si une démonstration ne satisfait pas les difficiles et les puristes, ils pourront trouver les résultats établis plus rigoureusement, sinon plus clairement, dans les Ouvrages consacrés aux démonstrations mathématiques rigoureuses ». Si l'on remarque que, dans toute la suite de l'Ouvrage, il est fait constamment et presque uniquement usage des trois théorèmes de la divergence, de Stokes et de Gauss, qu'une preuve rigoureuse de ceux-ci est bien plus courte et plus claire que les nombreuses explications plus ou moins naturelles que donne l'Auteur, on peut regretter que ces propositions tout à fait fondamentales ne soient pas toutes démontrées (car une démonstration mathématique non rigoureuse n'en est pas une); mais que M. Coffin les fasse simplement pressentir par des vues physiques plus ou moins convaincantes. Il est bien donné dans l'Ouvrage *trois* preuves du théorème

de Stokes, plusieurs preuves également du théorème de Gauss dont une, la seconde, masquant le caractère purement géométrique de la proposition devrait bien ne pas figurer dans ce Manuel ; pourquoi la démonstration précise et inattaquable du théorème de la divergence, qui est bien simple, n'est-elle pas donnée?

Les applications à la théorie électrique sont exposées au Chapitre VI. Après les théorèmes de Gauss, de Green, leurs applications immédiates aux potentiels, on trouve en notation vectorielle la plupart des formules classiques d'Électricité concernant les potentiels, les forces électriques, l'énergie d'un système. Ensuite, l'Auteur donne les équations du champ électromagnétique, équations de Maxwell, celle de la propagation des ondes électromagnétiques, le théorème de Poynting, puis les formules relatives à l'action des courants, à l'action mutuelle de deux circuits, à l'énergie mutuelle de deux systèmes de conducteurs et à la self-induction. Les formules vectorielles sont, en général, bien plus condensées que les mêmes formules en notation cartésienne.

Le Chapitre VII traite des applications à la Dynamique, à la Mécanique et à l'Hydrodynamique. On y rencontre les théorèmes généraux de la Mécanique, l'étude du mouvement du corps solide sans forces extérieures, du mouvement à la Poinsot, quelques formules relatives au gyroscope, les équations d'Euler, celles de Lagrange, enfin les équations fondamentales de l'Hydrodynamique et du mouvement des fluides, une ébauche de la théorie des tourbillons et la démonstration de l'impossibilité de la production d'un tourbillon dans un fluide sans frottement. En somme, la plupart des grandes théories y sont amorcées suffisamment pour que l'étudiant puisse ensuite les étudier dans les Ouvrages spéciaux.

De nombreux exercices à la fin de chaque Chapitre avec quelques indications relatives à la solution seront très utiles à l'étudiant. Enfin, un index alphabétique permettra d'utiliser ce Livre comme un mémento, un formulaire où l'on retrouvera rapidement les équations dont on a besoin pour traiter un problème à l'aide du calcul vectoriel.

Au point de vue du fond, nous avons déjà déploré le manque de rigueur de plusieurs parties de ce Manuel qui rend certains passages très obscurs et susceptibles de donner des idées fausses au lecteur. L'absence totale des discontinuités, leur omission complète, laisse planer une obscurité sur tout l'Ouvrage et empêche

de saisir même la véritable manière dont sont traités les problèmes de Physique mathématique. Et cependant, ceci n'est pas inhérent à la notation vectorielle qui est susceptible de s'adapter à la rigueur la plus absolue.

Au point de vue de la forme, nous nous permettrons également quelques observations; il est bon que la précision du style ajoute à celle des idées. Or, que penser de cette phrase (p. 64) : « ...nous exprimerons ce fait en écrivant $r = f(t)$, en lisant comme s'il y avait.... » Pourquoi ne pas faire concorder écriture et langage? A la page 74, nous lisons : « l'équation ci-dessus est égale à deux fois l'aire balayée... » (une équation égale à une aire?). De nombreux passages sont ainsi rédigés avec peu de soin et le traducteur aurait pu remédier à ce défaut et ne pas écrire comme à la page 80, par exemple : « ...trouver les composantes de $\frac{dr}{dt}$ dans la direction et perpendiculairement au rayon vecteur. »

Malgré ces critiques et observations, nous sommes convaincu que ce Manuel rendra des services aux étudiants qui n'osent s'engager dans la Physique mathématique avant de posséder une méthode de calcul commode et une notation simple qui leur permettent d'en aborder l'étude avec fruit.

GASTON CONTY.

MARCELIN [1] (RENÉ). — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA CINÉTIQUE PHYSICO-CHIMIQUE. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences physiques*, soutenue le 19 juin 1914, sous la présidence de M. G. LIPPMANN. 1 vol. in-8, VII-113 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

Le travail de M. Marcelin comporte une partie expérimentale intéressante sur l'*évaporation*. La difficulté des mesures, élégamment surmontée, prouve l'habileté de l'opérateur. Le sens expérimental de M. Marcelin est peut-être au reste encore plus évident dans la recherche *originale* qu'il présente comme seconde Thèse, recherche qui met en évidence des pellicules cristallines, d'épaisseur uniforme, pouvant s'abaisser jusqu'à l'épaisseur d'une couche de molécules.

Pourtant, le très grand intérêt du travail présenté réside surtout,

---

[1] Tué à l'ennemi en septembre 1914.

à notre avis, dans les théories qu'il développe. Ces théories nous semblent les plus importantes (en ce qui regarde la cinétique chimique) qui aient été formulées depuis celles de Gibbs et de Van 't Hoff, qu'elles prolongent au reste directement.

On sait que même ces puissants esprits n'avaient pu découvrir comment les vitesses de réaction dépendent des variables autres que la concentration des corps étudiés. En particulier, on ne possédait que des règles empiriques en ce qui regarde l'influence de la température sur les vitesses de réaction. Ce sont ces lacunes que M. Marcelin vient de combler, de la façon la plus satisfaisante.

1° Procédant du particulier au général, il a d'abord cherché si quelque formule ne contiendrait pas toutes les formules spéciales déjà trouvées en cinétique chimique. Il y est arrivé en approfondissant la notion de potentiel chimique ou d'affinité, sous la forme précisée par Gibbs. La vitesse *apparente* se présente toujours comme différence des vitesses d'accroissement de deux systèmes antagonistes, les variables déterminantes de chaque vitesse étant la température et l'affinité,

$$v = v_1 - v_2 + k_1 e^{-\frac{A_1}{RT}} - k_2 e^{-\frac{A_2}{RT}}.$$

2° Rattachant la Cinétique aux théories moléculaires statistiques, M. Marcelin a montré alors comment cette formule générale se présentait comme une conséquence de la doctrine de l'équipartition (Boltzmann-Gibbs-Einstein). L'idée générale est que les molécules *actives* sont celles qui ont atteint un certain état critique très différent de l'état moyen.

3° L'*énergie « critique »* nécessaire pour passer de l'état moyen à l'état critique peut être déterminée par les expériences qui donnent l'influence de la température sur la vitesse de transformation. En même temps, on voit comment le logarithme de la constante de vitesse dépend de la température,

$$\frac{d \ln k_1}{dT} = \frac{a_1}{T^2} + \frac{b_1}{T} + c_1.$$

En résumé, et bien qu'il faille attendre, pour juger à coup sûr de l'importance d'une théorie, de voir quelle influence elle exerce sur l'expérience, nous sommes portés à regarder comme *de tout premier ordre* les considérations développées par M. Marcelin.

La R.

MÉLANGES.

SUR LE GROUPE DE RATIONALITÉ DES ÉQUATIONS DU SECOND ORDRE DE M. PAINLEVÉ;

PAR M. JULES DRACH.

Dans un Mémoire fondamental, M. Painlevé, en 1900, a réussi à former effectivement et méthodiquement les divers *types* d'équations différentielles du second ordre

$$y'' = R(y', y, x), \tag{1}$$

rationnelles en y', algébriques en y, analytiques en x, dont l'intégrale générale est une fonction uniforme de la variable x.

Si l'on écarte ceux de ces types qui se ramènent immédiatement à des systèmes linéaires (et s'intègrent, par suite, à l'aide de transcendantes uniformes *attachées à des groupes linéaires*) il en reste six, qu'on peut regarder comme des dégénérescences de l'un d'eux, qui définissent des transcendantes uniformes essentiellement nouvelles.

Ces divers types se sont présentés depuis à M. R. Fuchs dans un problème relatif aux équations différentielles linéaires du second ordre (formation d'équations différentielles avec des points singuliers déterminés dont le groupe de monodromie est indépendant de l'affixe de l'un des points singuliers). Je les ai retrouvés également [1] dans l'étude des cas de réduction des équations du premier ordre

$$u' = \frac{P_3(u)}{P_1(u)},$$

où P_3 est un polynome en u du troisième degré, à coefficients arbitraires en x, P_1 un polynome du premier degré. En prenant comme *forme réduite*

$$u' = \frac{u(u-1)(x-y)}{x(x-1)(u-y)}, \tag{2}$$

[1] J. DRACH, *C. R. Acad. Sc.*, 30 mars 1914.

de manière à mettre en évidence les solutions $u = 0$, $u = \infty$, $u = 1$, $u = x$, y désignant une fonction arbitraire de x, on trouve les équations de M. Painlevé pour y quand on exprime que le groupe de rationalité de (2) est le groupe projectif, l'invariant correspondant ayant une expression rationnelle facile à préciser. Cela n'est d'ailleurs pas essentiellement distinct de l'observation de M. R. Fuchs.

Pour établir que ses transcendantes sont *essentiellement nouvelles*, M. Painlevé a dû faire appel à ma théorie de la rationalité [1] et montrer que, pour la plus simple de ses équations, le groupe de rationalité est un groupe *infini* : c'est le groupe des transformations à deux variables qui conservent les aires.

Mais sa démonstration, relative à cette équation

$$y'' = 6y^2 + \alpha x + \beta,$$

fait intervenir les propriétés de la transcendante y, établies par une étude préliminaire. Je me propose de donner ici une théorie plus élémentaire, aboutissant aux mêmes conclusions.

Remarques préliminaires.

L'équation de M. Painlevé

$$y'' = 6y^2 + \alpha x + \beta$$

se ramène immédiatement, *lorsque α n'est pas nul*, à la forme

$$y'' = 6y^2 + \alpha x \tag{1}$$

sur laquelle nous raisonnerons généralement.

Une transformation

$$x = \lambda X, \qquad y = \mu Y,$$

qui donne $y' = \frac{\mu}{\lambda} Y'$, change cette équation (1) en

$$Y'' = 6\mu\lambda^2 Y^2 + \alpha \frac{\lambda^3}{\mu} X;$$

en posant $\mu\lambda^2 = 1$, on aura donc

$$Y'' = 6Y^2 + \alpha\lambda^3 X = 6Y^2 + AX$$

---

[1] P. Painlevé. *C. R. Acad. Sc.*, 27 octobre 1902 et 1902-1903 *passim*.

et l'on voit qu'on peut disposer de λ, si $\alpha \neq 0$, de manière à donner au coefficient de X une valeur fixe arbitraire, 1 par exemple. Au lieu de procéder ainsi, nous laisserons ce coefficient indéterminé, de manière à pouvoir le supposer, à l'occasion, infiniment petit et nous interpréterons le résultat précédent en disant que la transformation

$$x = \lambda X, \qquad y = \frac{Y}{\lambda^2}, \qquad \alpha = \frac{A}{\lambda^3}$$

conserve l'équation (1).

Parmi les intégrales de l'équation à quatre variables x, y, y', α,

$$\Omega(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} (6y^2 + \alpha x) = 0,$$

on peut donc se borner à considérer celles qui sont formées de termes *de même poids*, ou *isobares*, quand on attribue respectivement à x, y, y', α les poids $1, -2, -3, -5$.

En divisant ces intégrales par une puissance convenable de α, qui est aussi une intégrale, on pourrait même ne considérer que des intégrales de poids zéro.

Comme les deux équations

$$\Omega(f) = 0, \qquad \Sigma(f) = 0,$$

où l'on pose

$$\Sigma(f) = x \frac{\partial f}{\partial x} - 2y \frac{\partial f}{\partial y} - 3y' \frac{\partial f}{\partial y'} - 5\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha},$$

forment, en vertu de l'identité

$$\Omega(\Sigma) - \Sigma(\Omega) = [\Omega, \Sigma] = \Omega,$$

un système complet à deux solutions, cela revient à substituer ce système à l'équation unique $\Omega(f) = 0$. Quand on étudie cette dernière, il résulte immédiatement de l'absence de y' dans le coefficient de $\frac{\partial f}{\partial y'}$ qu'on peut choisir deux solutions φ, ψ pour lesquelles

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, y')} = 1;$$

autrement dit : l'unité est un multiplicateur de Jacobi pour l'équation $\Omega(f) = 0$. Les deux solutions φ, ψ sont alors définies aux transformations près du groupe infini, qui a pour *équation de*

définition

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\varphi, \psi)} = 1.$$

Pour le système complet à quatre variables x, y, y', α, on doit remplacer l'équation précédente par

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, y')} = \alpha$$

en raison des identités

$$\Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - 2\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \qquad \Sigma\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) - 3\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0,$$

$$\Omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + 12y\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0, \qquad \Omega\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

et des identités analogues relatives à ψ. En faisant tendre α vers zéro, les deux intégrales φ et ψ cesseraient donc d'être distinctes en y et y' et l'on ne pourrait tirer aucun parti de la considération de l'équation $y'' = 6y^2$, regardée comme cas limite de l'équation de Painlevé.

Nous abandonnerons, pour cette raison, les intégrales de poids zéro et, en observant que les intégrales les plus simples de l'équation $y'' = 6y^2$ sont respectivement

$$\theta = y'^2 - 4y^3,$$

$$2\omega = x - \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 + \theta}},$$

pour lesquelles $\frac{\partial(\theta, \omega)}{\partial(y, y')} = 1$ et dont les poids sont -6 et 1, nous considérerons deux intégrales φ et ψ de $\Omega(f) = 0$, de poids respectifs -6 et 1, qui se réduisent pour $\alpha = 0$ aux précédentes et vérifient la condition

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y'} - \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\frac{\partial\psi}{\partial y} = 1.$$

On aura donc, pour ces intégrales, les relations

$$\Omega(\varphi) = \Omega(\psi) = 0$$

avec

$$\Sigma(\varphi) = -6\varphi, \qquad \Sigma(\psi) = \psi,$$

et il est aisé de voir que toutes ces relations forment un système complètement intégrable.

Les intégrales φ et ψ étant supposées développées suivant les puissances de α, sous la forme

$$\varphi = \theta + \alpha\theta_1 + \alpha^2\theta_2 + \ldots,$$
$$\psi = \omega + \alpha\omega_1 + \alpha^2\omega_2 + \ldots,$$

les éléments $\theta_1, \theta_2, \ldots, \omega_1, \omega_2, \ldots$ s'obtiennent de proche en proche par des quadratures qui portent sur des fonctions de y seul. Les périodes des intégrales définies ainsi introduites font apparaître, dans $\theta_1, \theta_2, \ldots, \omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$, de nouveaux termes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ et l'expression générale de φ et ψ, *obtenue par continuation analytique d'une expression particulière*, sera

$$\Phi = \theta + \alpha(\theta_1 + \lambda_1) + \alpha^2(\theta_2 + \lambda_2) + \ldots,$$
$$\Psi = \omega + \mu + \alpha(\omega_1 + \mu_1) + \alpha^2(\omega_2 + \mu_2) + \ldots.$$

Nous savons, d'autre part, qu'on doit avoir aussi

$$\Phi = \Phi(\varphi, \psi \mid \alpha), \qquad \Psi = \Psi(\varphi, \psi \mid \alpha),$$

les deux fonctions du second membre devant satisfaire aux conditions

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\varphi, \psi)} = 1,$$
$$\Sigma(\Phi) = -6\varphi\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \psi\frac{\partial\Phi}{\partial\psi} - 5\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = -6\Phi,$$
$$\Sigma(\Psi) = \Psi.$$

Si l'on pose alors, eu égard aux remarques faites sur θ et ω,

$$\Phi = \varphi + \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots,$$
$$\Psi = \psi + \psi_0 + \alpha\psi_1 + \alpha^2\psi_2 + \ldots,$$

on obtiendra des équations aux dérivées partielles qui permettent de déterminer de proche en proche les expressions *les plus générales* de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ au moyen des variables φ et ψ seules.

Les identités en α :

$$\alpha\lambda_1 + \alpha^2\lambda_2 + \ldots = \alpha\varphi_1 + \alpha^2\varphi_2 + \ldots,$$
$$\mu + \alpha\mu_1 + \alpha^2\mu_2 + \ldots = \psi_0 + \alpha\psi_1 + \alpha^2\psi_2 + \ldots,$$

où les expressions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ doivent être déve-

loppées elles-mêmes suivant les puissances de α, donnent alors le moyen de calculer effectivement les *expressions particulières* de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \psi_0, \psi_1, \psi_2, \ldots$ qui correspondent aux périodes introduites dans φ et ψ par des contours fermés convenables décrits par la variable y dans son plan, c'est-à-dire les transformations effectives du *groupe de monodromie* de l'ensemble (φ, ψ).

A notre point de vue, les intégrales *principales en* $x = x_0$ de l'équation $\Omega(f) = 0$, c'est-à-dire celles qui se réduisent respectivement à y et à y' lorsqu'on y fait $x = x_0$ et qu'on obtient en permutant x, x_0, y, y_0, y', y'_0 dans les développements de l'intégrale générale, développements méromorphes d'après M. Painlevé, doivent être étudiées comme fonction des arguments φ et ψ; leur uniformité entraîne l'existence de deux fonctions uniformes de ces arguments φ et ψ qui demeurent inaltérées par les transformations du groupe de monodromie de l'ensemble (φ, ψ).

On peut encore dire que y et y' seront définis en x par l'inversion du système

$$\varphi(x, y, y') = \varphi,$$
$$\psi(x, y, y') = \psi.$$

Pour justifier cette manière de voir, dont le développement fera l'objet d'un travail ultérieur, il importe d'abord d'établir que les intégrales φ et ψ sont effectivement les plus simples qu'on puisse définir pour l'équation $\Omega(f) = 0$, ou d'une manière plus précise, qu'il n'est pas possible de choisir parmi tous les systèmes φ, ψ qui vérifient les conditions

$$\Omega(\varphi) = \Omega(\psi) = 0, \qquad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, y')} = 1,$$

un système particulier vérifiant, *en outre*, une relation d'ordre quelconque, rationnelle en $x, y, y', \varphi, \psi, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial y'}, \ldots$, non-conséquence des précédentes. Dans ma terminologie, le *groupe de rationalité* de l'équation $\Omega(f) = 0$ est le groupe général des transformations à deux variables φ, ψ, qui conservent les aires; il est défini par la condition unique

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\varphi, \psi)} = 1;$$

c'est ce qui va résulter de ce qui suit.

1° *Il n'y a pas d'intégrales particulières algébriques.* — S'il existe pour l'équation

$$\Omega(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'}(6y^2 + \alpha x) = \Omega_0(f) + \alpha x \frac{\partial f}{\partial y'} = 0$$

une intégrale particulière f, rationnelle et entière en x, y, y', il y en aura aussi une qui sera, en outre, rationnelle et entière en α. Cela résulte du fait que α est une intégrale ou encore, ici, de la nature de la transformation qui conduit de l'équation

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = 6Y^2 + X$$

à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 6y^2 + \alpha x.$$

Admettons qu'on ait

$$\Omega(f) = Lf,$$

où f est un polynome en x, y, y', α; L sera aussi un polynome en x, y, y', α de degré 1 au plus par rapport à l'ensemble de ces quatre lettres.

Si l'on suppose f de degré m en α,

$$f = f_0 + \alpha f_1 + \ldots + \alpha^m f_m,$$

et si l'on pose $L = L_0 + L_1 \alpha$, où L_1 est une constante et L_0 une fonction du premier degré de x, y, y', l'identité

$$\Omega_0(f) + \alpha x \frac{\partial f}{\partial y'} = (L_0 + L_1 \alpha) f$$

donnera immédiatement

$$\Omega_0(f_0) = L_0 f_0,$$

$$\Omega_0(f_1) + x \frac{\partial f_0}{\partial y'} = L_0 f_1 + L_1 f_0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Omega_0(f_m) + x \frac{\partial f_{m-1}}{\partial y'} = L_0 f_m + L_1 f_{m-1},$$

$$x \frac{\partial f_m}{\partial y'} = L_1 f_m.$$

La dernière équation exige $L_1 = 0$, sans quoi le degré du second membre en y' dépasserait celui du premier.

Considérons alors l'identité

$$\Omega_0(f_0) = L_0 f_0;$$

elle exprime que la relation

$$f_0 = 0$$

définit des intégrales particulières de l'équation du second ordre

$$y'' = 6y^2.$$

Or, cette dernière s'intègre au moyen des deux relations

$$\theta = y'^2 - 4y^3, \qquad 2\omega = x - \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 + \theta}};$$

elle n'a manifestement pas d'autres intégrales premières particulières *algébriques* que celles qui sont de la forme

$$P(\theta) = 0,$$

où P est un polynome.

On peut le montrer directement : si l'on avait identiquement

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{\partial f_0}{\partial y} y' + \frac{\partial f_0}{\partial y'} 6y^2 = L_0 f_0,$$

où f_0 dépend de x, L_0 serait indépendant de x et il en résulterait que $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ vérifie une identité analogue.

L'équation $y'' = 6y^2$ aurait donc l'intégrale première rationnelle

$$\frac{\frac{\partial f_0}{\partial x}}{f_0} = \text{const.}$$

qui dépendrait de x.

On conclut donc de là que f_0 est un polynome en θ, dont les coefficients sont des puissances convenables de α, choisies de manière que tous les termes de f_0 soient de même poids. Mais alors L_0 est nécessairement nul et le polynome $f(x, y, y', \alpha)$ devra satisfaire à l'identité

$$\Omega(f) = 0.$$

En d'autres termes, *l'existence d'un polynome f satisfaisant à une identité*

$$\Omega(f) = Lf$$

entraîne celle d'une intégrale première algébrique (rationnelle et entière)

$$f(x, y, y', \alpha) = \text{const.}$$

pour l'équation

$$y'' = 6y^2 + \alpha x.$$

Si l'on se reporte aux identités vérifiées par $f_0, f_1, \ldots, f_m$, elles s'écrivent simplement

$$\Omega_0(f_0) = 0,$$

$$\Omega_0(f_1) + x\frac{\partial f_0}{\partial y'} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Omega_0(f_m) + x\frac{\partial f_{m-1}}{\partial y'} = 0,$$

$$x\frac{\partial f_m}{\partial y'} = 0;$$

d'après la dernière, f_m est indépendant de y'.

Soit, en mettant en évidence, dans f_0, la plus haute puissance de θ,

$$f_0 = \theta^k + \ldots;$$

proposons-nous de calculer dans $f_1, f_2, \ldots$ *les parties correspondantes à ce terme*, parties que nous désignerons respectivement par $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$.

L'équation

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}y' + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y'}6y^2 + xk\theta^{k-1}2y' = 0$$

exige que φ_1 dépende de x; en dérivant par rapport à x, on aura

$$\Omega_0\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right) + k\theta^{k-1}2y' = 0,$$

d'où l'on conclut que le polynome

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + 2ky\theta^{k-1} = \sigma$$

satisfait à l'identité

$$\Omega_0(\sigma) = 0;$$

σ est donc simplement un polynome en θ dont les coefficients dépendent de α.

Dans l'équation

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x} + 2ky\theta^{k-1} = \sigma(\theta),$$

$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ est formé de termes de même poids; ce poids est celui de $y\theta^{k-1}$, c'est-à-dire $-6(k-1)-2$. Il en résulte, en passant, que σ ne peut renfermer θ à une puissance k' supérieure à $(k-4)$, car α est de poids -5 et la plus grande valeur de k' satisfaisant à

$$5m + 6k' = 2 + 6(k-1)$$

correspond à $m = 4$.

La forme de φ_1 est

$$\varphi_1 = (\sigma - 2ky\theta^{k-1})x + \lambda(y, y'),$$

où le polynome λ doit satisfaire à l'identité

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} y' + \frac{\partial \lambda}{\partial y'} 6y^2 = -\sigma + 2ky\theta^{k-1};$$

nous sommes ainsi amenés à remplacer la variable y' par la variable θ,

$$\theta = y'^2 - 4y^3,$$

et à poser

$$\lambda = A + B\sqrt{4y^3 + \theta},$$

où A et B sont des polynomes en y et θ. L'identité à vérifier

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y}\sqrt{4y^3 + \theta} = -\sigma + 2ky\theta^{k-1}$$

donne alors

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial B}{\partial y}(4y^3 + \theta) + 6y^2 B = 2ky\theta^{k-1} - \sigma.$$

Supposons B de degré p en y,

$$B = b_0 y^p + \ldots;$$

le premier membre de la seconde équation renfermera un terme

$$(4p + 6)b_0 y^{p+2}$$

qui ne peut jamais se trouver au second membre, même pour $p = 0$. Il est impossible que B soit un polynome en y et θ.

Lorsque f_0 dépend de θ, φ_1 ne peut donc être un polynome en x, y, y' et il en est de même de f_1. Il n'existe pas, par suite, d'intégrale particulière algébrique.

Si f_0 se réduisait à une constante absolue, on pourrait la sup-

primer dans f et diviser ensuite par α; f_1 jouerait alors le rôle de f_0.

L'équation $y'' = 6y^2 + \alpha x$, où $\alpha \neq 0$, *ne possède donc pas d'intégrale première algébrique.*

2° *Le groupe de rationalité est primitif.* — Quand il s'agit de déterminer le groupe de rationalité d'une équation du second ordre

$$y'' = F(x, y, y'),$$

la première recherche à faire est celle de la *primitivité* du groupe. Lorsque le groupe est *imprimitif*, s'il n'existe qu'une famille de courbes invariante par les transformations du groupe, ces dernières s'écrivent

$$\begin{cases} \Phi = f(\varphi), \\ \Psi = g(\varphi, \psi), \end{cases}$$

et l'invariant différentiel $\frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial y'}$ appartient au domaine de rationalité.

S'il existe deux familles invariantes, les transformations du groupe sont de la forme

$$\begin{cases} \Phi = f(\varphi), \\ \Psi = g(\psi); \end{cases}$$

les deux expressions

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} : \frac{\partial\psi}{\partial y'}$$

sont *algébriques* dans le domaine de rationalité, leurs fonctions symétriques étant rationnelles dans ce domaine.

S'il existe plus de deux familles invariantes, il en existe une infinité; les transformations du groupe de rationalité sont engendrées par le groupe

$$\begin{cases} \Phi = a\varphi + b, \\ \Psi = a\psi + c, \end{cases}$$

auquel on adjoint des transformations linéaires formant un groupe fini quelconque, de manière à constituer un groupe complexe.

Les invariants

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial y'}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} : \frac{\partial\psi}{\partial y'}$$

sont algébriques dans le domaine de rationalité. Sans insister sur les caractères précis de ce cas, disons simplement que leur étude correspond entièrement à celle d'une équation différentielle *linéaire* du second ordre lorsque l'intégrale générale est algébrique : on est amené à considérer les groupes linéaires finis (dièdre et corps réguliers), les éléments transformés étant, par exemple, $\frac{\partial\varphi}{\partial y'}$ et $\frac{\partial\psi}{\partial y'}$.

Nous n'avons heureusement pas ici à envisager tous ces cas. L'équation à étudier

$$y'' = 6y^2 + \alpha x$$

se réduit, pour $\alpha = 0$, à l'équation

$$y'' = 6y^2$$

dont le groupe de rationalité est imprimitif, ainsi que cela résulte des formules

$$\theta = y'^2 - 4y^3, \qquad 2\omega = x - \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 + \theta}},$$

et la seule famille invariante est $\theta = \text{const}$.

Si donc le groupe de rationalité cherché est imprimitif, ses transformations sont de la forme

$$\Phi = f(\varphi), \qquad \Psi = g(\varphi, \psi)$$

et la résolvante en $\frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial y'}$ possède *une seule solution rationnelle*.

En d'autres termes, il existera un système complet

$$A(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + (F - \mu y')\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0,$$

$$B(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\varphi}{\partial y'} = 0,$$

à coefficients rationnels qui définit l'intégrale φ, et l'intégration de l'équation du second ordre est ramenée à celle de l'équation

$$\varphi(x, y, y') = \varphi_0.$$

La résolvante en μ, qui doit posséder une solution rationnelle dans le domaine de F, est donc

$$A(\mu) = B(F - \mu y'),$$

c'est-à-dire

$$\Omega(\mu) = \frac{\partial F}{\partial y} + \mu \frac{\partial F}{\partial y'} - \mu^2.$$

Pour l'équation $y'' = 6y^2 + \alpha x$, cette résolvante s'écrira simplement

$$\Omega(\mu) = \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} y' + \frac{\partial \mu}{\partial y'}(6y^2 + \alpha x) = 12y - \mu^2.$$

On observera que φ étant formé de termes de même poids, μ sera de poids (-1); si l'on pose, par suite,

$$\mu = \frac{P}{Q},$$

où P et Q sont des polynomes en x, y, y', α sans diviseur commun, le poids de Q dépassera d'une unité celui de P.

L'identité

$$Q\Omega(P) - P\Omega(Q) = 12yQ^2 - P^2$$

donne immédiatement

$$\begin{aligned} \Omega(P) - 12yQ &= LP, \\ \Omega(Q) - P \quad &= LQ, \end{aligned}$$

où L désigne un polynome en x, y, y', α qui sera du premier degré au plus en x, y, y'.

Désignons respectivement par p, q, l les degrés de P, Q, L par rapport à l'ensemble des lettres x, y, y'; les deux identités précédentes exigent, dans l'hypothèse $l > 1$,

$$p + l = q + 1, \qquad q + l = p,$$

ce qui donnerait $2l = 1$, d'où l'impossibilité. Si l'on suppose $l = 1$, on n'a plus que des inégalités

$$q + 1 \leqq p + 1, \qquad p \leqq q + 1$$

qui n'admettent que la solution $p = q + 1$.

En désignant par m le poids de P, celui de Q est $(m + 1)$ et celui de L est -1.

Le polynome L, *linéaire en* x, y, y', *entier en* α *et de poids* (-1), *ne peut qu'être identiquement nul.*

Les deux polynomes P, Q en x, y, y', α devront donc vérifier

les équations

$$\Omega(P) - 12yQ = 0,$$
$$\Omega(Q) - P \quad = 0.$$

Nous pouvons toujours poser

$$P = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad Q = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y'},$$

ρ désignant un facteur convenable, et si l'on porte ces expressions dans les équations précédentes, on trouve, en vertu de $\Omega(\varphi) = 0$,

$$\Omega(\rho) = 0,$$

c'est-à-dire que ρ est une intégrale de l'équation à étudier. Si cette intégrale est fonction de φ, en modifiant cette dernière on peut supposer $\rho = 1$, c'est-à-dire que les dérivées de l'intégrale φ relatives à y, à y' (et par suite aussi à x) sont des polynomes en x, y, y'.

La fonction φ elle-même est donc aussi un polynome en x, y, y', c'est-à-dire qu'il existera une intégrale première algébrique

$$\varphi(x, y, y') = \text{const.}$$

pour l'équation $y'' = 6y^2 + \alpha x$. Or on a établi qu'il n'y en a pas.

Si l'intégrale ρ est indépendante de φ, on peut la prendre pour seconde intégrale fondamentale ψ de l'équation $\Omega(f) = 0$ et l'on aura

$$\psi\, d\varphi = -[Py' + Q(6y^2 + \alpha x)]\, dx + P\, dy - Q\, dy'.$$

Mais, si cela était, on aurait une identité analogue pour l'équation

$$y'' = 6y^2 + \alpha x + \beta$$

qui se déduit de l'équation donnée en ajoutant une constante à x, et cette identité subsisterait ensuite quand on ferait $\alpha = 0$, c'est-à-dire pour l'équation

$$y'' = 6y^2 + \beta.$$

Or, cette dernière équation s'intègre par les deux relations

$$\theta = y'^2 - 4y^3 - 2\beta y, \qquad 2\omega = x - \int \frac{dy}{\sqrt{4y^3 + 2\beta y + \theta}},$$

où θ et ω sont les constantes arbitraires; l'équation aux dérivées

partielles correspondante

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} (6y^2 + \beta) = 0$$

est imprimitive et l'intégrale θ joue le rôle de φ, c'est-à-dire est définie isolément.

L'identité

$$\psi\, d\varphi = P\, dy - Q\, dy' - [P y' + Q(6y^2 + \beta)]\, dx$$

exigerait qu'une seconde intégrale ψ s'obtienne explicitement sous la forme

$$\psi = \frac{P}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{-P}{+12y^2 + 2\beta},$$

c'est-à-dire soit rationnelle en x, y, y' : ce qui est manifestement impossible d'après la forme de ω qui comporte une intégrale elliptique.

En résumé, pour aucune intégrale φ de l'équation

$$\Omega(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} (6y^2 + \alpha x) = 0,$$

le quotient $\frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial y'}$ n'est rationnel en x, y, y', α; c'est-à-dire que *le groupe de rationalité de cette équation est primitif.*

3° *Le groupe de rationalité est le groupe infini* Γ *des transformations qui conservent les aires.* — Ce groupe Γ est défini par l'équation unique

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\varphi, \psi)} = 1;$$

il n'a pas d'autre invariant rationnel que $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, y')}$.

Pour établir ce point, nous remarquerons que le seul type de sous-groupe du groupe précédent qui soit primitif est un groupe fini, *le groupe linéaire spécial*. En réalité, les types qui se présentent *dans le cas général* sont des groupes *complexes* engendrés par le groupe linéaire spécial auquel on adjoint des transformations linéaires constituant un groupe fini. Dans le cas actuel, ces transformations, devant appartenir à Γ, appartiennent elles-mêmes au groupe linéaire spécial. Le groupe de rationalité ne

peut donc être que le groupe linéaire spécial lui-même, s'il n'est pas Γ. L'examen du tableau des six groupes primitifs à deux variables, donné par Lie, le montre immédiatement. On est ainsi amené à rechercher si les invariants du groupe linéaire spécial en φ, ψ, qui sont ici les coefficients de dy^3, $dy^2 dy'$, $dy\, dy'^2$, dy'^3 dans le développement de l'expression

$$d\varphi\, d^2\psi - d\psi\, d^2\varphi,$$

où φ et ψ sont regardés comme dépendant de y et y', peuvent recevoir des valeurs *rationnelles* en x, y, y', α par un choix convenable des intégrales φ, ψ qui satisfont déjà à la relation

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(y, y')} = 1.$$

En tenant compte des deux dérivées de cette dernière relation, ces invariants se réduisent à quatre distincts :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial y'} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial y'}, \quad \ldots$$

et les résolvantes correspondantes s'obtiendraient sans difficulté.

On évitera la discussion du système résolvant en remarquant que l'équation étudiée

$$y'' = 6y^2 + \alpha x + \beta$$

se réduit, pour $\alpha = 0$, à l'équation

$$y'' = 6y^2 + \beta$$

dont on définit la solution générale par les formules

$$\theta = y'^2 - 4y^3 - 2\beta y, \qquad 2\omega = x - \int \frac{dy}{\sqrt{4y^2 + 2\beta y + \theta}}.$$

Les deux intégrales θ et ω satisfont à la condition

$$\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial\omega}{\partial y'} - \frac{\partial\theta}{\partial y'}\frac{\partial\omega}{\partial y} = 1,$$

comme on le reconnaît immédiatement, en remplaçant la variable y' par θ. Le groupe de rationalité correspondant est formé des transformations

$$\theta_1 = \theta,$$
$$\omega_1 = \omega + P(\theta),$$

où $P(\theta)$ représente une expression de la forme $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$, formée avec les deux périodes P_1, P_2 de l'intégrale elliptique *la plus générale* et deux constantes arbitraires λ_1, λ_2, c'est-à-dire la solution générale transcendante d'une certaine équation différentielle linéaire du second ordre.

Si le groupe de rationalité de l'équation $y'' = 6y^2 + \alpha x + \beta$ était le groupe linéaire spécial, ce groupe ou l'un de ses sous-groupes pourrait être choisi pour groupe de rationalité de l'équation $y'' = 6y^2 + \beta$. Il existerait donc deux fonctions φ, ψ de θ et ω satisfaisant à la condition $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(\theta, \omega)} = 1$ et subissant des transformations *linéaires* quand on y remplace ω par $\omega + P(\theta)$. De plus, les invariants du groupe linéaire spécial, formés avec ces deux fonctions φ, ψ, seraient rationnels en x, y, y', β.

La première condition qui exprime que le groupe

$$\theta_1 = \theta, \qquad \omega_1 = \omega + P(\theta)$$

est *semblable* à un groupe linéaire ne peut être satisfaite. Elle exigerait, en effet, qu'on pût déterminer φ et ψ par l'identité

$$P(\theta)\frac{\partial f}{\partial \omega} = (a\varphi + b\psi + c)\frac{\partial f}{\partial \varphi} + (a'\varphi + b'\psi + c')\frac{\partial f}{\partial \psi},$$

où a, b, c, a', b', c' sont des fonctions de λ_1, λ_2 lorsqu'on pose

$$P(\theta) = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2,$$

en désignant par P_1, P_2 les deux périodes de l'intégrale elliptique. On en déduirait donc

$$a_1\varphi + b_1\psi + c_1 = P_1(\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}, \qquad a'_1\varphi + b'_1\psi + c'_1 = P_1(\theta)\frac{\partial \psi}{\partial \omega},$$

$$a_2\varphi + b_2\psi + c_2 = P_2(\theta)\frac{\partial \varphi}{\partial \omega}, \qquad a'_2\varphi + b'_2\psi + c'_2 = P_2(\theta)\frac{\partial \psi}{\partial \omega},$$

avec

$$a_1 b'_1 - a'_1 b_1 = a_2 b'_2 - a'_2 b_2 = 1$$

et, par suite, en éliminant les dérivées, deux équations linéaires en φ, ψ, *nécessairement distinctes*, qui donneraient φ, ψ comme fonctions de θ seul, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

Le groupe de rationalité de l'équation du second ordre

$$y'' = 6y^2 + \alpha x$$

est donc, pour $\alpha \neq 0$, *le groupe infini* Γ *des transformations qui conservent les aires planes*, dont l'équation de définition est

$$\frac{\partial(\Phi, \Psi)}{\partial(\varphi, \psi)} = 1.$$

NOTE SUR UN POINT D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES;

PAR M. E. JABLONSKI.

Les savants architectes égyptiens qui ont construit la célèbre pyramide de Chéops, 4000 ans environ avant J.-C., connaissaient-ils le nombre π, rapport d'une circonférence de cercle à son diamètre, dont l'histoire ne fait aucune mention, à ma connaissance, avant Archimède, 300 ans seulement environ avant J.-C.

Telle est la question que posent les mesures prises sur la pyramide par les savants qui accompagnèrent le général Bonaparte dans son expédition d'Égypte. Il résulte de ces mesures que le périmètre de la base divisé par le double de la hauteur est, au degré d'approximation que comportent ces mesures, le nombre classique π, et l'on en a conclu que les savants égyptiens étaient, à une époque très reculée, en possession d'un savoir géométrique très étendu et avaient voulu réaliser, dans leur construction, le symbole mathématique dont la découverte est généralement attribuée à Archimède, beaucoup plus tard.

D'autre part, Hérodote rapporte, d'après les dires des prêtres égyptiens, gardiens des traditions, que, dans cette pyramide, la surface du carré construit sur la hauteur est équivalente à celle de chacune des faces latérales qui sont égales entre elles; cette affirmation a été aussi vérifiée par les savants français.

Il en résulte deux équations entre le côté de la base, qui est un carré, et la hauteur. Ces équations, en vertu de la similitude, restent les mêmes pour toutes les pyramides de même sommet et ayant pour bases des sections horizontales du monument, ce qui

permet fort heureusement de n'avoir pas à tenir compte des changements inconnus qui ont pu se produire dans le niveau du sol environnant.

Si l'on désigne par x le demi-côté de la base et par y la hauteur de l'une quelconque de ces pyramides partielles, ces équations sont respectivement pour les deux relations énoncées plus haut et, dans leur ordre,

$$4x = \pi y \tag{1}$$

et

$$y^2 = x\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{2}$$

Il est manifeste que ces deux équations sont incompatibles, en rigueur, car il en résulterait, par un calcul facile, que π est racine d'une équation bicarrée à coefficients entiers, ce que nous savons impossible.

Comment concilier cette impossibilité théorique avec les résultats apparents de mesures soigneusement prises? Voici : il arrive, et c'est là le point intéressant de cette petite Note, que l'équation bicarrée en question admet une racine qui n'est pas π, mais qui en est approchée à moins de 302 cent-millièmes, par excès. Si l'on pose, en effet, $\frac{4x}{y} = z$, l'équation (2) devient, tous calculs faits,

$$z^4 + 16z^2 - 16^2 = 0,$$

dont la seule racine acceptable, réelle et positive, est

$$\sqrt{-8 + \sqrt{320}} = 3,144608\ldots,$$

dont la différence avec π est, par excès, 0,003016....

Chacune des relations (1) et (2) entraîne donc approximativement l'autre. Quelle est celle que les architectes égyptiens, pour des raisons mystiques inconnues de nous, ont voulu réaliser? Il est très vraisemblable que c'est la seconde, transmise par tradition dans le monde des initiés de l'antique Égypte et communiquée à Hérodote, tandis que la première n'a jamais été l'objet d'aucune mention dans l'antiquité. Elle est d'origine toute moderne et n'est,

à mon sens, qu'une illusion qui s'explique par un accident fortuit de calcul.

Il faut remarquer, d'ailleurs, que la notion de surface plane devait, dès la plus haute antiquité, être familière à l'esprit humain, surtout dans un pays où les inondations annuelles du Nil rendaient fréquente la nécessité de refaire les bornages des propriétés et les partages du sol. C'est vraisemblablement à ces nécessités qu'est due la naissance de la Géométrie à des époques très antérieures à l'ère chrétienne; la notion abstraite de la mesure des lignes courbes n'est venue que bien plus tard et a commencé avec Archimède par la mesure de la circonférence de cercle, la plus simple de toutes les courbes.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Comberousse (Charles de). — *Cours de Mathématiques*. Tome IV : *Algèbre supérieure*, seconde Partie; quatrième édition. 1 vol. xxxiv-831 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1914. 15fr.

Duhem (Pierre). — *La Science allemande*. Quatre Leçons faites par l'Auteur, à Bordeaux, sous les auspices de l'Association des étudiants catholiques de l'Université, les 25 février, 4, 11 et 18 mars 1915, avec un Appendice contenant quelques réflexions sur la Science allemande. 1 vol. petit in-8, v-145 pages. Paris, A. Hermann et Fils; 1915. 1fr,50.

Forsyth (A. R.). — *A Treatise on differential Equations*. Fourth edition. 1 vol. gr. in-8, xviii-584 pages. London, Macmillan and Co; 1914. 14 s.

Greenhill (Sir G.). — *Report on gyroscopic Theorie*. (Advisory Committee for Aeronautics : Reports and Memoranda, n° 146.) 1 vol. in-4° jésus (21 × 33), iii-277 pages, 11 planches. London and Cardiff, Wyman and Sons; Edinbourg, H. M. Stationery Office; Dublin, E. Ponsonby; London, T. Fisher Unwin; 1914. 10 s.

Niewenglowski (B.). — *Cours de Géométrie analytique*. Tome III : *Géométrie dans l'espace*, avec une *Note de M.* E. Borel *sur les transformations en Géométrie;* seconde édition. 1 vol. gr. in-8, iv-608 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie; 1914. 14fr.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Œuvres complètes de Thomas Jan Stieltjes, *publiées par les soins de la Société mathématique d'Amsterdam*. Tome I. 1 vol. in-4°, VIII-471 pages. Groningen, P. Noordhoff, 1914.

Jean Stieltjes, le géomètre si distingué qui a été prématurément enlevé à la science et à l'enseignement, alors qu'il était devenu professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse, a laissé dans notre pays des souvenirs qui sont loin d'être effacés. La nature même de ses recherches analytiques avait, dès le premier jour, attiré l'attention de notre grand géomètre Charles Hermite qui entretenait avec lui une correspondance active, publiée pour le plus grand bien de la Science, après la mort de Stieltjes, par MM. B. Baillaud et H. Bourget.

Pour rendre compte de l'objet et du but de la publication actuelle, nous ne saurions mieux faire que de reproduire la belle Préface mise en tête des Œuvres par la Commission chargée de leur publication.

« Dans sa réunion du 30 avril 1910, la Société mathématique d'Amsterdam prit la résolution de publier une édition complète des Œuvres scientifiques du membre défunt, le docteur ès sciences Jean Stieltjes. Après la belle publication de la Correspondance d'Hermite et de Stieltjes par MM. B. Baillaud et H. Bourget, la Société tenait à témoigner, elle aussi, de sa haute admiration pour l'œuvre de l'éminent géomètre qui, nous ne saurions l'oublier, avant de devenir Français, avait été notre compatriote.

» L'exécution de ce projet fut confiée à une Commission composée de MM. W. Kapteyn, J.-C. Kluyver et E.-F. van de Sande Bakhuyzen, qui acceptèrent cette tâche avec empressement. Après avoir été autorisée par les rédactions des différents journaux à réimprimer les Notes et Mémoires en question, la Commission demanda à Mme Stieltjes la permission de consulter les papiers laissés par son époux, afin de pouvoir examiner s'il s'y trouvait encore quelque travail dans un état assez avancé pour en permettre la publication. Mme Stieltjes ayant gracieusement acquiescé

à cette demande, la Commission a pu ajouter quelques petites Notes au second Volume de cette Collection.

» Les Notes et Mémoires avaient été publiés en diverses langues, dix en hollandais, deux en allemand, tous les autres en français. La Commission décida de les réimprimer tels qu'ils étaient, en ajoutant une traduction française aux Articles hollandais.

» Pour l'ordre de ce travail, la Commission se guide sur l'importante *Notice sur les travaux scientifiques de T.-J. Stieltjes* publiée dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1re série, t. IX, 1895, p. 1-64), par le professeur E. Cosserat. Dans cette Notice, l'auteur donne une brève analyse, par ordre chronologique, des Notes et Mémoires de Stieltjes. On y trouve 82 numéros dont les nos 15 et 34 sont des traductions françaises des nos 10 et 38 respectivement. La suppression pure et simple de ces deux traductions eût donné lieu à un changement de numérotage. Pour conserver aussi longtemps que possible, les mêmes numéros, nous avons substitué au n° 15 un autre petit Article tiré de la *Zeitschrift für Vermessungswesen* (Stuttgart, t. XV, 1886, p. 141-144). Cet Article fut envoyé de Paris au rédacteur de ce Journal par un inconnu, mais la Commission est en possession d'une lettre qui sera publiée à la fin du second Volume et dont on peut tirer presque avec certitude la conclusion que cet inconnu était Stieltjes. Cette substitution permit de conserver les numéros de la Notice jusqu'au n° 37. Mais, à partir de là, les numéros de l'édition présente sont devenus inférieurs d'une unité aux numéros anciens. En outre, quelques Notes seront ajoutées à la fin du second Volume. On y indiquera quelles sont les lettres de la Correspondance qui se rapportent aux différents Articles, on y insérera les Notes qui se trouvent dans la Notice de M. Cosserat, et enfin la Commission ajoutera encore quelques Notes et éclaircissements.

» La Commission n'a pas jugé opportun de joindre aux Œuvres complètes une Notice bibliographique. Elle n'aurait pu que redire ce qui a déjà été si bien dit dans la *Notice sur Stieltjes* que M. Bourget a jointe à la Correspondance; elle y a seulement joint un portrait datant des dernières années de Stieltjes. »

Nous n'avons qu'un mot à ajouter. Le Volume que nous avons

sous les yeux comprend 17 numéros. Le second Volume, que nous attendons avec impatience, terminera la publication.

GASTON DARBOUX.

THOMPSON (A. W. H.). — A NEW ANALYSIS OF PLANE GEOMETRY, FINITE AND DIFFERENTIAL, *with numerous Examples*. 1 vol. in-8, XVI-120 pages. Cambridge, at the University Press, 1914.

1. Il semble que, dans la pensée de son Auteur, cette nouvelle Analyse de la Géométrie plane devrait se suffire à elle-même, puisque son point de départ est donné en définitions et en axiomes. Mais, sans même essayer une discussion approfondie des axiomes, que M. Thompson avoue n'avoir pas tentée, les ayant seulement introduits à mesure qu'ils lui paraissaient se présenter, nous devons constater que la forme de plusieurs de ces énoncés fondamentaux laisse subsister des difficultés d'un caractère tout élémentaire, et dont on s'étonne que l'Auteur ne paraisse pas s'être avisé.

Il introduit des *éléments* de deux sortes : les *points* et les *lignes*. Par *ligne*, il entend une droite dirigée. Une ligne et un point sur cette ligne sont dits en relation d'*incidence*. Le *déterminé* de deux éléments de même espèce est l'élément de l'autre espèce, qui est en incidence avec chacun d'eux : ligne par deux points avec la direction de l'un vers l'autre, point sur deux lignes.

« La *mesure* de deux éléments est une certaine quantité (*sic*) déterminée par ces éléments, exprimant la relation de l'un par rapport à l'autre. La mesure de deux points est leur distance, la mesure d'un point et d'une ligne est la distance du point à la ligne, la mesure de deux lignes est leur angle. La question de signe dans ces mesures est fondamentale. » Il ne paraît pas douteux, bien que l'Auteur ne le dise pas, que ces *quantités* sont des nombres algébriques, car il calcule avec elles au moyen des signes, y compris celui de la division, et des règles du calcul algébrique.

M. Thompson désigne les points par les lettres romaines a, b, c, ...; les lignes par les lettres grecques α, β, γ, ...; le *déterminé* de deux points ou de deux lignes par $\overline{ab}$, $\overline{\alpha\beta}$; la mesure de deux points par (ab); d'un point et d'une ligne, de même, par $(a\beta) = (\beta a)$; de deux lignes par $(\alpha\beta)$.

Il considère ces trois symboles comme ayant des signes. Pour $(a\beta)$ le signe dépend du sens de la rotation autour de a indiqué par la direction de β. Pour les deux autres, aucune explication n'est donnée, et il pose les axiomes : $(ab) = -(ba)$, $(\alpha\beta) = -(\beta\alpha)$. Pour (ab) nous ne comprenons pas d'où peut venir le signe, si a, b, ne sont pas pris sur une ligne supposée donnée d'abord.

Pour $(\alpha\beta)$, il y a d'autres difficultés. A chaque ligne α correspond la ligne opposée $\bar{\alpha}$; et c'est un nouvel axiome que $(\alpha\bar{\alpha}) = \pi$, π étant une « *quantité positive constante* ». Que signifie encore ce mot de *quantité?* S'il s'agit d'un nombre, comme on a, par la définition de cette quantité π, $(\alpha\bar{\alpha}) = (\bar{\alpha}\alpha)$; et que l'axiome

$$(\alpha\beta) = -(\beta\alpha)$$

donne, d'autre part, $(\alpha\bar{\alpha}) = -(\bar{\alpha}\alpha)$, il en faut conclure $2\pi = 0$. Il ne peut donc pas être ici question d'un calcul algébrique ordinaire; mais M. Thompson ne nous en avertit pas.

En ce qui concerne la détermination même d'un élément par deux autres, que faut-il penser des lignes parallèles, dont il n'est parlé qu'incidemment, comme définies par le fait que la mesure de deux d'entre elles est zéro? Introduira-t-on des points à l'infini? Que sera la mesure quand un tel élément interviendra?

Revenons aux angles. Ils n'interviennent, en général, que par leurs lignes trigonométriques. L'Auteur introduit d'abord le *sinus* par la formule de définition

$$(1) \qquad \sin(\overline{ab}\gamma) = \frac{(a\gamma) - (b\gamma)}{|(ab)|},$$

en posant en axiome que « cette *expression* (?) ne dépend que de la ligne γ et du déterminé $\overline{ab}$. » Il faudrait bien ajouter qu'elle ne dépend même que de la *mesure* $(\overline{ab}\gamma)$!

Le cosinus est introduit par la formule de définition

$$\cos(\alpha\beta) = \sin\left(\alpha\beta_{\frac{\pi}{2}}\right),$$

où $\beta_{\frac{\pi}{2}}$ est une ligne telle que $(\beta\gamma) = \frac{\pi}{2}$.

M. Thompson n'a pas de peine ensuite à transcrire dans son écriture symbolique la démonstration classique de la formule d'addition des arcs.

2. A vrai dire, l'objet essentiel du Livre est une œuvre de calcul. Il s'agit d'une méthode de *réduction* qui permet d'exprimer, de proche en proche, dans une figure quelconque formée de points et de lignes, les mesures des couples d'éléments construits successivement à partir des éléments donnés, en fonction des mesures des couples de ces éléments initiaux. On obtiendra, par exemple, pour la figure formée par deux points a, b et deux lignes γ, δ la formule :

$$(2) \qquad (\overline{\overline{ab}\gamma}\delta) = \frac{(a\gamma)(b\delta)-(a\delta)(b\gamma)}{(a\gamma)-(b\gamma)}.$$

On recherchera, en particulier, sous le nom d'*éliminants*, les relations identiques entre les mesures des couples d'éléments initiaux, qui seront essentielles pour la démonstration des théorèmes de Géométrie. Telle la formule de Casey qui lie les distances mutuelles de 4 points.

Ce calcul de réduction a pour but la généralisation de la méthode de la Géométrie analytique. Dans celle-ci on a, pour figure de référence, deux lignes, rectangulaires par exemple, ξ, η. Un point est défini par les mesures $(a\xi)$, $(a\eta)$: une droite par les mesures $(\xi\alpha)$, $(\overline{\xi\eta}\alpha)$. Les formules de l'Auteur permettront d'employer, dans un but analogue et avec d'autres *mesures* fondamentales, des figures de référence quelconques.

Une courbe est engendrée par un point courant x et peut être définie, dans les conditions les plus générales, par une équation

$$(3) \qquad f[(xa)], [(xb)], \ldots, (x\alpha), (x\beta), \ldots] = 0,$$

où peuvent même figurer des symboles complexes comme celui qui forme le premier membre de l'équation (2).

La méthode différentielle peut s'appliquer aussi ; si x' est le point infiniment voisin de x sur la courbe considérée, on introduira la direction du déplacement $\overline{xx'}$, que l'Auteur désigne par τx ; et la différentiation $\frac{d}{dx} = \lim \frac{\Delta}{(xx')}$, qui n'est en fait que

la dérivation suivant la tangente à la courbe. M. Thompson montre comment on peut effectuer cette différentiation sur les *déterminés* simples ou complexes et sur les équations telles que (3). C'est ainsi qu'il donne la loi de formation d'une différentielle totale telle que

$$d\left(\overline{\overline{\overline{\overline{\overline{xy}\zeta}\alpha}\beta}c}\right). \tag{4}$$

De nombreux exemples, poussés jusqu'à la théorie de la courbure, illustrent la méthode : elle s'applique d'une manière analogue à la variation des lignes. Quelques indications sont données aussi sur l'intégration.

3. Au fond, nous craignons bien que cette nouvelle Analyse n'ait qu'un intérêt de curiosité. Le principe de la symbolique employée ne diffère guère, comme le remarque l'Auteur lui-même, de celui de la méthode de Grassmann. Et ce symbolisme ne fait ici, le plus souvent, comme on a pu le voir en divers points de cet aperçu de l'Ouvrage, que déguiser des calculs bien connus. Dans les cas simples, l'emploi de notations abrégées, spéciales à chaque cas, et d'une lecture moins ardue, y suppléerait avantageusement. Dans les cas compliqués, la notation symbolique devient inextricable : le fait même qu'elle veut réunir sous des notations analogues des éléments de natures géométriques différentes exige, pour s'en servir, un effort d'attention qui nous paraît hors de proportion avec l'avantage qu'elle peut offrir par une certaine condensation des calculs, et par une symétrie, plus apparente que réelle, dans le rôle joué par les lignes et les points.

E. VESSIOT.

MAGGI (GIAN ANTONIO). — GEOMETRIA DEL MOVIMENTO. *Lezioni di Cinematica con un Appendice sulla Geometria della Massa.* 1 vol. gr. in-8, x-225 pages. Pise, Enrico Spoerri, 1914.

Ce Livre, joint à la *Dynamique physique* du même Auteur, constitue un cours complet de Mécanique rationnelle. Comme la plupart des auteurs modernes, M. Maggi a séparé l'étude pure-

ment mathématique du mouvement de l'étude des lois du mouvement des corps naturels. Il est inutile d'insister sur l'intérêt que présente cette séparation et sur les inconvénients universellement reconnus aujourd'hui qu'il y aurait à mêler l'étude de la Cinématique à celle de la Dynamique. M. Maggi a tenu à faire cette distinction très nettement et à l'introduire dans les titres mêmes des deux parties de son cours, éditées séparément et sous des désignations différentes.

La partie que nous analysons et qui est intitulée *Géométrie du Mouvement* est surtout un Traité de Cinématique. L'Auteur a en vue l'étude ultérieure de la Dynamique et il se propose de préparer cette étude en traitant toute la partie purement mathématique de la théorie du mouvement : aussi, laisse-t-il de côté les applications concrètes de la Cinématique aux mécanismes, par exemple l'étude des engrenages, ainsi que les questions d'une nature plus particulièrement géométrique et sans intérêt pour la Dynamique, par exemple l'étude de la distribution des accélérations dans un corps solide en mouvement.

Mais l'Ouvrage n'est pas limité à l'étude de la Cinématique. Il contient un Appendice important intitulé *Géométrie de la masse* dans lequel sont étudiées, à un point de vue purement formel, les diverses notions qui se présentent en Géométrie ou en Cinématique lorsqu'on fait intervenir la masse; celle-ci est définie d'une façon purement abstraite comme égale à une intégrale de la forme

$$\int_\tau k\,d\tau$$

étendue au volume τ, où k est une fonction positive d'un point du champ assujettie seulement à être telle que l'intégrale précédente soit indépendante du temps. Cette Géométrie de la masse comprend l'étude des centres de gravité, des moments d'inertie, de la force vive, de la quantité de mouvement et du moment cinétique d'un système matériel, enfin du système des forces motrices (produit de la masse d'un point par son accélération) appliquées aux divers points d'un système matériel en mouvement. La nature de ces questions et la méthode qui sert à les étudier justifient leur introduction à la suite de la Cinématique proprement dite.

La Dynamique, ainsi dégagée par avance de tous les dévelop-

pements généraux de pur calcul, pourra être limitée aux postulats physiques, à l'étude de quelques mouvements particuliers des corps naturels choisis parmi les plus intéressants et à l'interprétation physique des résultats du calcul.

Il est bien évident qu'on pourrait aller dans cette voie encore plus loin que ne le fait l'Auteur. Le travail, par exemple, pourrait être aussi défini d'une façon purement formelle en envisageant le travail d'un vecteur pour un déplacement donné de l'origine de ce vecteur, puis le travail d'un système de vecteurs pour une variation infiniment petite de ce système correspondant aux variations δq_1, δq_2, ..., δq_n des paramètres qui le définissent. Le calcul du travail total des forces motrices (vecteurs définis plus haut) d'un système matériel en mouvement nous conduirait bien près des équations de Lagrange : la Dynamique interviendrait seulement avec le principe de D'Alembert et ce principe, joint au calcul ainsi fait, nous donnerait immédiatement les équations de Lagrange. La Dynamique ne serait pas alors très loin d'être absorbée entièrement dans ces préliminaires. Mais il faut bien avouer que la compréhension de la Mécanique n'en serait nullement facilitée, car les définitions de la force vive ou des moments d'inertie, par exemple, satisfaisantes au point de vue logique, paraissent arbitrairement choisies, tant qu'on n'aborde pas l'étude des mouvements naturels. Cette remarque n'est nullement une critique à l'égard de l'Auteur, qui a su se borner et qui s'est contenté de développer les notions signalées plus haut, en nous avertissant d'ailleurs qu'il est réservé à la Dynamique de mettre pleinement en lumière l'importance de ces diverses notions et tout d'abord de la masse.

M. Maggi divise la Cinématique en quatre Chapitres intitulés respectivement *Déplacement*, *Mouvement*, *Vitesse* et *Accélération*. Il ne se borne pas à la Cinématique du point et à celle du corps solide, mais il aborde, au contraire, dès le début du Livre, la Cinématique des milieux continus déformables. Il donne, en effet, au mot *Déplacement* le sens général de correspondance biunivoque entre deux points P et P' : ainsi, dans le premier Chapitre, après l'étude des déplacements d'un corps solide, ou déplacements rigides d'un milieu, on trouve l'étude des déplacements homographiques et, plus généralement, des déformations régulières

quelconques d'un milieu continu, en particulier des déformations infiniment petites. De même, dans le Chapitre relatif à la vitesse, après avoir étudié la distribution des vitesses à un instant donné dans un corps solide en mouvement, l'auteur étudie la déformation infiniment petite d'un milieu continu par laquelle on passe des positions des points du milieu à l'instant t aux positions des mêmes points à l'instant $t + dt$; il envisage ensuite les mouvements irrotationnels d'un milieu et il définit les deux systèmes de coordonnées classiques, coordonnées initiales (variables de Lagrange) et coordonnées actuelles (variables d'Euler).

Dans tout le cours de l'Ouvrage, M. Maggi fait usage, suivant les cas, de la Géométrie analytique ou des méthodes vectorielles. Le système de calcul vectoriel adopté est celui de MM. Burali-Forti et Marcolongo, devenu si rapidement classique en Italie. Un tableau explicatif des notations vectorielles met très aisément le lecteur en état de se servir de ces notations, sans qu'il ait à recourir aux travaux de MM. Burali-Forti et Marcolongo. Le calcul vectoriel donne très souvent des démonstrations simples, débarrassées de tout cet appareil de calcul qui résulte, non pas de la nature même des problèmes, mais uniquement de la représentation des vecteurs par des coordonnées. D'autre part, les coordonnées cartésiennes, employées avec discernement, constituent un instrument de recherche des plus puissants, qui a fait ses preuves depuis trois siècles et, si le langage cartésien est moins concis que le langage vectoriel, il est souvent plus clair. Aussi, M. Maggi n'a-t-il pas cru devoir suivre complètement MM. Burali-Forti et Marcolongo et, appelé à prendre parti entre les coordonnées cartésiennes et le calcul vectoriel, il a gardé une neutralité également bienveillante à l'égard des deux méthodes, employant dans chaque cas celle qui lui paraissait convenir le mieux à la question traitée. Remarquons cependant que la méthode cartésienne s'introduit tout naturellement dans les questions de mouvement, car l'étude d'un mouvement implique nécessairement l'établissement d'un système de référence, ainsi que le fait remarquer M. Maggi dans sa Préface, et la méthode cartésienne introduit le trièdre de référence sans aucun détour. Aussi, on peut présumer, dit M. Maggi « qu'elle pourra conserver dans l'avenir sa fraîcheur séculaire ».

Dans une Note placée à la fin du Livre, M. Maggi dit quelques mots de la théorie des homographies vectorielles de MM. Burali-Forti et Marcolongo qu'il n'a pas cru devoir utiliser dans le cours même de l'Ouvrage et qui permettrait d'étudier par des méthodes vectorielles les propriétés du déplacement homographique étudié précédemment à l'aide des coordonnées cartésiennes. Une autre Note est consacrée au *principe de relativité* et à la transformation de Lorentz dans leurs rapports avec la théorie cinématique du mouvement relatif.

S. Lattès.

MIEWENGLOWSKI (B.). — Cours de Géométrie analytique. Tome III : *Géométrie dans l'espace*, avec une *Note* de Émile Borel *sur les transformations en Géométrie*; seconde édition. 1 vol. gr. in-8, IV-608 pages, 43 figures. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

Les trois volumes de ce Cours ont été analysés par Jules Tannery dans ce Bulletin, en 1896 (p. 308-310). Aussi n'insisterons-nous pas en présentant au public la seconde édition du Tome III.

Cet Ouvrage a été rédigé d'après le cours que l'Auteur a si brillamment professé au Lycée Louis-le-Grand. Il renferme plus de matières que celles qui sont exigées par les programmes, du reste bien variables, des cours de Mathématiques spéciales.

Rappelons que l'on trouve, dans le Tome I, l'usage des coordonnées trilinéaires et des coordonnées tangentielles; dans le Tome II, l'étude des courbes définies par des équations différentielles; et que les matières contenues dans les trois Tomes sont abondantes et traitées d'une façon complète. Dans le Tome III, l'Auteur explique l'usage du trièdre attaché à une courbe, donne les formules de Frenet et de J.-A. Serret, emploie les coordonnées polaires, se sert de la définition des foyers donnée par M. G. Darboux, étudie la variation de la courbure des sections normales en un point simple d'une surface (théorème de Meusnier), détermine des courbes et des surfaces par des équations différentielles (formules d'Olinde Rodrigues), donne des notions sur les quaternions.

Er. L.

MÉLANGES.

SUR LA MÉTHODE DES FONCTIONS MAJORANTES ET LA MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES;

PAR M. J. PÉRÈS.

Toutes les fois que la méthode des fonctions majorantes et celle des approximations successives s'appliquent à un même problème d'analyse (résolution d'une équation implicite, intégration d'une équation différentielle, etc.), on constate que les approximations successives, convenablement formées, convergent dans un domaine *contenant celui où la méthode des fonctions majorantes permet d'assurer l'existence de la solution.*

Je vais montrer qu'il s'agit là d'une propriété intrinsèque des deux méthodes, qui subsiste quelle que soit la précision avec laquelle on emploie les fonctions majorantes [1].

Prenons, pour simplifier, une seule fonction inconnue. Les problèmes envisagés se présentent tous sous la forme suivante : les coefficients du développement de Taylor de la fonction inconnue

$$y(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots \tag{1}$$

doivent vérifier des relations de forme

$$c_n = P_n(a_{ik}, c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}), \tag{2}$$

P_n désignant un polynome *à coefficients positifs* par rapport aux lettres $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ et par rapport à un nombre fini des quantités connues $a_{i,k}$.

La méthode des fonctions majorantes fournit une limite inférieure du rayon de convergence de la série (1) : c'est le rayon de

[1] On sait que cette propriété est vraie pour les équations différentielles linéaires.

convergence R de la série

$$(1') \qquad C_0 + C_1 x + \ldots + C_n x^n + \ldots,$$

dont les coefficients C_n sont positifs et obtenus par les relations

$$(2') \qquad C_n = P_n(A_{i,k}, C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}),$$

déduites des relations (2) en y remplaçant les a_{ik} par des A_{ik} tels que

$$A_{ik} > |a_{ik}|.$$

Pour appliquer les approximations successives, on peut poser

$$c_n^{(0)} = 0$$

et

$$(3) \quad c_n^{(j)} = P_n(a_{ik}, c_0^{(j-1)}, c_1^{(j-1)}, \ldots, c_{n-1}^{(j-1)}) \qquad (j, n = 0, 1, \ldots, \infty).$$

La solution sera donnée par la série

$$(4) \qquad y^{(0)}(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \{y^{(j)}(x) - y^{(j-1)}(x)\} = y^{(0)} + \sum_{j=1}^{\infty} \psi^{(j)}(x),$$

avec

$$y^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(j)} x^n,$$

dans tout domaine où cette série (4) convergera absolument e uniformément. Remarquons enfin que

$$\psi^{(j)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{(j)} x^n,$$

avec

$$\gamma_n^{(j)} = c_n^{(j)} - c_n^{(j-1)},$$

et que des relations (3) on peut tirer

$$(5) \quad \gamma_n^{(j)} = \Pi_n(a_{ik}, \gamma_0^{(j-1)}, \ldots, \gamma_{n-1}^{(j-1)}, c_0^{(j-1)}, \ldots, c_{n-1}^{(j-1)}, c_0^{(j-2)}, \ldots, c_{n-1}^{(j-2)}),$$

Π_n étant, comme P_n, un polynome *à coefficients positifs* par rapport aux lettres qui y figurent. En effet, on a

$$\gamma_n^{(j)} = P_n(a_{ik}, c_0^{(j-1)}, \ldots, c_{n-1}^{(j-1)}) - P_n(a_{ik}, c_0^{(j-2)}, \ldots, c_{n-1}^{(j-2)});$$

en groupant, pour former cette différence, les monomes correspondants des polynomes P_n et en se servant de ce que

$$[c_0^{(j-1)}]^2 - [c_0^{(j-2)}]^2 = (c_0^{(j-1)} + c_0^{(j-2)})\gamma_0^{(j-1)},$$
$$c_0^{(j-1)}c_1^{(j-1)} - c_0^{(j-2)}c_1^{(j-2)} = c_0^{(j-1)}\gamma_1^{(j-1)} + \gamma_0^{(j-1)}c_1^{(j-2)},$$

et ainsi de suite, on mettra sans peine $\gamma_n^{(j)}$ sous la forme (5) avec des coefficients *tous positifs*.

Il reste alors à démontrer la convergence uniforme de

$$\Sigma|\psi^{(j)}(x)|$$

lorsque $|x| \leqq R' < R$. Pour cela remplaçons dans les formules (3) et (5) les a_{ik} par les A_{ik}. Les $c_n^{(j)}$ et $\gamma_n^{(j)}$ sont remplacés par des quantités $C_n^{(j)}$, $\Gamma_n^{(j)}$, positives, telles que

$$C_n^{(j)} > |c_n^{(j)}|, \qquad \Gamma_n^{(j)} > |\gamma_n^{(j)}|.$$

La série $\Sigma_n C_n R'^n = Y(R')$ converge et, comme on vérifie que

$$C_n^{(j)} < C_n,$$

il en est de même des séries

$$\Sigma_n C_n^{(j)} R'^n = Y^{(j)}(R') < Y(R')$$

et

$$\Sigma \Gamma_n^{(j)} R'^n = \Psi^{(j)}(R').$$

On a enfin

$$\Psi^{(j)}(R') \geqq |\psi^{(j)}(x)| \qquad (\text{si } |x| \leqq R').$$

Tout revient donc à prouver que

$$\Sigma_j \Psi^{(j)}(R')$$

converge. C'est immédiat, car cette dernière série est à termes positifs et la somme de ses p premiers termes est égale à $Y^{(p)}(R')$ et donc inférieure à $Y(R')$.

Le résultat annoncé est ainsi démontré.

EXEMPLES DE SURFACES ALGÉBRIQUES DE DIVISEUR SUPÉRIEUR A L'UNITÉ;

Par M. Lucien GODEAUX.

On sait ce qu'on doit entendre, d'après M. Severi, par *diviseur σ d'une surface algébrique* (1). Ce diviseur est le nombre maximum des systèmes complets d'une surface algébrique, équisous-multiples d'un même système. C'est donc le nombre maximum des systèmes complets $\{C_1\}$, $\{C_2\}$, ... tels que

$$\{\lambda C_1\} = \{\lambda C_2\} = \ldots,$$

quels que soient $\{C_1\}$ et λ.

M. Severi, dans ses travaux, a cité plusieurs exemples de surfaces de diviseur supérieur à l'unité. Parmi ceux-ci, il convient de citer l'exemple de la surface de genre zéro et de bigenre un

$$(p_a = P_3 = 0,\ P_2 = 1),$$

découverte par M. Enriques (2), et dont un modèle projectif est la surface du sixième ordre passant doublement par les arêtes d'un tétraèdre. C'est l'étude de cet exemple qui nous a conduits à la construction de surfaces pour lesquelles on a $\sigma \geqq 3$. D'une façon plus précise, nous démontrerons, dans cette Note, le théorème suivant :

La surface dont les équations sont

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_{\frac{1}{2}(p-1)} \\ X_1^2 & X_2 & X_3 & \ldots & X_{\frac{1}{2}(p+1)} \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$X_{\frac{1}{2}(p+3)}^p = \varphi\left(X_0, X_1, \ldots, X_{\frac{1}{2}(p+1)}\right),$$

(1) F. Severi, *Annales de l'École Normale supérieure*, 1908, et *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 1910.

(2) F. Enriques, *Memorie della Società italiana delle Scienze*, 1906.

φ étant une fonction rationnelle et entière à coefficients généraux et p étant premier, est une surface de diviseur $\sigma = p$.

1. Considérons le plan p-uple cyclique

$$z^p = \varphi\left(y^p, y^{\frac{1}{2}(p-1)}x, \ldots, y^{\frac{1}{2}(p-2i-1)}x^{2i+1}, \ldots, yx^{p-2}, x^p\right),$$

p étant un nombre premier et φ étant une fonction rationnelle et entière, à coefficients généraux, de ses $\frac{1}{2}(p+3)$ variables.

Dans ces conditions, le plan p-uple envisagé est une surface régulière ($p_a = p_g$) et son diviseur est, en général, $\sigma = 1$.

Cette surface, que nous désignerons par F, admet plusieurs transformations birationnelles cycliques en elle-même; parmi ces transformations, nous distinguerons celle qui est définie par les formules

$$(\mathrm{T}) \qquad x' = \varepsilon x, \qquad y' = \varepsilon^2 y, \qquad z' = z,$$

ε étant une racine primitive p-uple de l'unité. Cette transformation T engendre une involution I_p d'ordre p. Le groupe de I_p contenant le point (x, y, z) contient, en outre, les $p-1$ points

$$(\varepsilon x, \varepsilon^2 y, z), \quad (\varepsilon^2 x, \varepsilon^4 y, z), \quad \ldots, \quad (\varepsilon^{p-1} x, \varepsilon^{p-2} y, z).$$

L'involution I_p ne possède aucun point de coïncidence. En effet, s'il y avait de ces points, ceux-ci ne pourraient être qu'aux points unis de la transformation cyclique ($x' = \varepsilon x$, $y' = \varepsilon^2 y$, $z' = z$). Or, la fonction φ étant à coefficients généraux, la surface F ne passe pas par ces points, donc :

L'involution I_p est dépourvue de points de coïncidence.

2. Considérons une surface normale Φ, image de l'involution I_p dont il vient d'être question. Remarquons immédiatement que la surface F étant régulière, il en est de même de la surface Φ.

Soit $|\Gamma_1|$ le système des sections hyperplanes de Φ (système complet puisque Φ est normale). Aux courbes Γ_1 correspondent, sur F, des courbes que nous désignerons par C_1 et qui appartiennent à un système complet $|\mathrm{C}|$, en général plus ample que $|\Gamma_1|$.

Si $|\Gamma_1|$ et $|\mathrm{C}|$ avaient la même dimension, il suffirait de prendre, au lieu de $|\Gamma_1|$, un multiple suffisamment élevé, $|\lambda\Gamma_1|$, pour que

la dimension de $|\lambda C|$ soit supérieure à celle de $|\lambda\Gamma_1|$. On peut donc supposer, sans restriction, que la dimension de $|C|$ est supérieure à celle de $|\Gamma_1|$.

La transformation T change $|C|$ en lui-même et, parmi les courbes C, il y en a, telles les C_1, que T change en elles-mêmes. Ces courbes forment des systèmes incomplets $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_k|$.

A une courbe de l'un de ces systèmes correspond, sur Φ, une courbe dépourvue de points doubles (en des points simples de Φ) engendrant un système linéaire complet. Nous désignerons par $|\Gamma_2|$, $|\Gamma_3|, \ldots, |\Gamma_k|$ les systèmes qui correspondent, sur Φ, aux systèmes $|C_2|, |C_3|, \ldots, |C_k|$ respectivement.

A une courbe C quelconque correspond, sur Φ, une courbe dotée d'un certain nombre de points doubles variables et qui appartient au système $|p\Gamma_1|$. En effet, lorsque C varie dans $|C|$ d'une manière continue et devient une courbe C_1, la courbe homologue de C sur Φ devient une courbe $p\Gamma_1$. De même, on voit que si C devient une courbe C_2, son homologue sur Φ se réduit à une courbe $p\Gamma_2$. Par suite, on a

$$|p\Gamma_1| = |p\Gamma_2| = \ldots = |p\Gamma_k|.$$

3. M. Severi, dans le dernier travail cité plus haut, a démontré que, si σ est le diviseur d'une surface algébrique et s'il existe des systèmes complets tels que

$$\{\lambda H_1\} = \{\lambda H_2\} = \ldots = \{\lambda H_n\},$$

n est le plus grand dénominateur commun de σ et de λ.

Appliquons ce théorème à la surface Φ. Le système $|\Gamma_2|$ existe certainement, car $|C|$ ayant une dimension supérieure à celle de $|\Gamma_1|$, T agit sur les éléments de $|C|$ comme une homographie sur les points d'un espace, et il y a au moins deux systèmes de courbes transformées en elles-mêmes. On a donc $k \geqq 2$. D'autre part, p étant premier et k devant diviser p et σ, on a nécessairement $k = p$ et σ est multiple de p.

Supposons qu'il soit possible de trouver, sur Φ, deux systèmes $|\Gamma_1|, |\Gamma'_1|$ tels que

$$|\mu\Gamma_1| = |\mu\Gamma'_1|,$$

μ étant différent de p; alors, les nombres C_1, C'_1 qui corres-

pondent sur F respectivement aux courbes Γ_1, Γ'_1 appartiennent respectivement à des systèmes linéaires $|C|$, $|C'|$ différents. Pour ces systèmes, on a nécessairement $|\mu C| = |\mu C'|$. Mais cela implique que le diviseur de F est supérieur à l'unité, ce qui n'a pas lieu en général. On doit donc avoir $\mu = 1$ et, par suite, d'après la définition du diviseur, $\sigma = p$.

Le diviseur de Φ *est* $\sigma = p$.

4. Il nous reste à chercher les équations de Φ. Pour cela, remarquons que les courbes

$$\begin{aligned} &y^p + a_0 y^{\frac{1}{2}(p-1)} x + a_1 y^{\frac{1}{2}(p-3)} x^3 + \ldots \\ &\quad + a_i y^{\frac{1}{2}(p-2i-1)} x^{2i+1} + \ldots + a_{\frac{1}{2}(p+1)} x^p + a' = 0 \end{aligned}$$

forment un système linéaire, sans points-base, de degré p^2 et sont invariantes pour T. En rapportant projectivement ces courbes aux plans d'un espace linéaire à $\frac{1}{2}(p+3)$ dimensions, on obtiendra par suite un modèle projectif de Φ sous forme d'une surface d'ordre p, comptée p fois. Cela revient à poser

$$X_0 = y^p, \quad X_1 = y^{\frac{1}{2}(p-1)} x, \quad \ldots, \quad X_{i+1} = y^{\frac{1}{2}(p-2i-1)} x^{2i+1}, \quad \ldots,$$
$$X_{\frac{1}{2}(p-1)} = y x^{p-2}, \quad X_{\frac{1}{2}(p+1)} = x^p, \quad X_{\frac{1}{2}(p+3)} = z.$$

On a alors

$$\frac{X_1}{X_2} = \frac{X_2}{X_3} = \ldots = \frac{X_{\frac{1}{2}(p-1)}}{X_{\frac{1}{2}(p+1)}} = \frac{y}{x^2},$$

$$\frac{X_0}{X_1^2} = \frac{y}{x_2},$$

$$X_{\frac{1}{2}(p+3)}^p = \varphi\left(X_0, X_1, \ldots, X_{\frac{1}{2}(p+1)}\right).$$

On en déduit les équations de Φ sous la forme

$$\left\| \begin{matrix} X_0 & X_1 & X_2 & \ldots & X_{\frac{1}{2}(p-1)} \\ X_1^2 & X_2 & X_3 & \ldots & X_{\frac{1}{2}(p+1)} \end{matrix} \right\| = 0,$$

$$X_{\frac{1}{2}(p+3)}^p = \varphi\left(X_0, X_1, \ldots, X_{\frac{1}{2}(p+1)}\right).$$

SUR LES VOLUMES DUS A LA ROTATION D'UN CONTOUR;

PAR M. A. BUHL.

1. Les célèbres théorèmes de Guldin, qu'il faut peut-être faire remonter jusqu'à Pappus, ont donné lieu à un assez grand nombre de considérations supplémentaires. Mais, à l'heure actuelle, la question est complètement dominée, quant aux volumes tournants, par le Mémoire de M. G. Kœnigs : *Sur la détermination générale du volume engendré par un contour fermé gauche ou plan dans un mouvement quelconque* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1889). Comme l'indique ce titre, il s'agit du volume correspondant au déplacement d'un contour quelconque, dans le cas cinématique le plus général; au fond la question est ainsi épuisée, tout résultat relatif à de tels volumes devant forcément pouvoir se déduire des formules de M. Kœnigs.

Il peut arriver cependant que certains volumes aient une expression dont l'élégance particulière rachète ce qui lui manque en généralité, et c'est surtout une expression de ce genre que je me propose de noter dans le cas d'un volume engendré par la rotation d'un contour fermé quelconque autour d'un axe quelconque ne traversant pas ce contour.

2. Soit un contour fermé Σ sur lequel nous jetterons une cloison σ dont l'élément $d\sigma$ sera considéré au point $M(x, y, z)$. Ce contour est relié invariablement à un axe AB autour duquel il peut tourner; l'axe AB est défini par le point $A(a, b, c)$ et par les cosinus directeurs λ, μ, ν. Le volume engendré par $d\sigma$ est le même que celui engendré par la projection de $d\sigma$ sur le plan MAB et cette projection est $\cos\theta\, d\sigma$ si θ est l'angle des normales menées, en M, à la surface σ (cosinus directeurs α, β, γ) et au plan MAB.

Cette dernière normale a pour coefficients directeurs les

mineurs des astérisques dans le Tableau

$$\begin{matrix} * & * & * \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{matrix}$$

et, pour transformer de tels coefficients en cosinus directeurs, il faut les diviser par la racine carrée de la somme de leurs carrés, racine qui peut s'écrire

$$\sqrt{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]-[\lambda(x-a)+\mu(y-b)+\nu(z-c)]^2},$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{\overline{MA}^2-\overline{AP}^2}=\overline{MP},$$

si P est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur AB.

Dans ces conditions

$$\cos\theta=\frac{1}{\overline{MP}}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix}$$

et, le volume engendré par $d\sigma$ étant $2\pi\overline{MP}\cos\theta\, d\sigma$, le volume total engendré par la rotation de la cloison σ est

$$(1)\qquad V=2\pi\int\int_{\sigma}\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \lambda & \mu & \nu \\ x-a & y-b & z-c \end{vmatrix}d\sigma.$$

Il est géométriquement évident qu'un tel volume ne doit pas dépendre de la cloison σ, mais seulement du contour Σ de celle-ci; c'est une fonction de ce contour, une fonction de ligne au sens de M. V. Volterra. L'intégrale double que nous venons d'obtenir est donc transformable, par la formule de Stokes, en une intégrale de ligne attachée à Σ, remarque due à M. Kœnigs, mais sur laquelle il est inutile d'insister en vue de ce qui suit.

3. Je rappelle certaines notations dont je me suis déjà servi dans mon Mémoire *Sur les applications géométriques de la*

formule de Stokes (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1910).

Nous considérons le contour Σ non pas lorsqu'il tourne, mais lorsqu'il est d'abord donné dans une position bien déterminée. Il a alors pour projections :

Sur Oyz un contour d'aire A_x et de centre de gravité $G_x(0, \eta_x, \zeta_x)$.
Sur Ozx un contour d'aire A_y et de centre de gravité $G_y(\xi_y, 0, \zeta_y)$,
Sur Oxy un contour d'aire A_z et de centre de gravité $G_z(\xi_z, \eta_z, 0)$.

Revenons maintenant à l'intégrale double de (1). Les facteurs $\alpha\, d\sigma$, $\beta\, d\sigma$, $\gamma\, d\sigma$ qu'elle contient sont respectivement des éléments d'aire pour les aires planes A_x, A_y, A_z et, dans ces conditions, les facteurs x, y, z, qu'elle contient également, donnent des intégrales doubles s'exprimant immédiatement à l'aide des coordonnées des centres de gravité G. Finalement on a pour ladite intégrale

$$\lambda(A_z\eta_z - A_y\zeta_y) + \mu(A_x\zeta_x - A_z\xi_z) + \nu(A_y\xi_y - A_x\eta_x) - \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

et l'on peut écrire

$$(2) \qquad V = 2\pi \begin{vmatrix} \lambda & \mu & \nu \\ \xi_* - a & \eta_* - b & \zeta_* - c \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}.$$

Il faut convenir, dans le développement du déterminant, que les lettres grecques prennent, aux lieu et place des astérisques dont elles sont pourvues, les indices des A qui viennent les multiplier.

C'est d'abord cette formule (2) qui, *quant à sa forme*, m'a semblé originale et suffisamment digne d'être écrite pour elle-même.

4. On peut maintenant déduire de (2) certains résultats géométriques qui, bien entendu, ne sont pas plus originaux que cette formule ne l'est, *au fond*, mais qui peuvent s'y lire avec une facilité et une élégance particulières. Ainsi tout ce qui est relatif à la géométrie des droites de Plücker et Möbius y est absolument en évidence.

Pour un contour Σ donné, l'ensemble des axes de volumes V

constants est un complexe quadratique pour l'élégante étude duquel il n'y a même pas lieu de transformer l'équation (2).

Les axes de volumes nuls forment un complexe linéaire.

Cherchons, plus particulièrement, à déplacer l'axe AB *parallèlement à lui-même* sans modification du volume tournant. Alors les coordonnées a, b, c de A deviennent variables et doivent satisfaire à l'équation

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ \lambda & \mu & \nu \\ a & b & c \end{vmatrix} = \text{const.}$$

On voit que l'axe AB doit décrire un plan parallèle à une droite de coefficients directeurs A_x, A_y, A_z, c'est-à-dire parallèle au *vecteur aréolaire* de M. G. Kœnigs. Pour une cloison plane, ce vecteur est perpendiculaire au plan de la cloison; ainsi, dans le cas du théorème de Guldin ordinaire, où une cloison plane tourne autour d'une droite de son plan, on peut déplacer cette droite parallèlement à elle-même et perpendiculairement audit plan sans changer le volume tournant.

5. Si le contour Σ tourne autour de Ox ou Oy ou Oz, les volumes tournants respectivement engendrés sont, d'après (2),

$$(3)\qquad \begin{cases} V_x = 2\pi(A_z\eta_z - A_y\zeta_y), \\ V_y = 2\pi(A_x\zeta_x - A_z\xi_z), \\ V_z = 2\pi(A_y\xi_y - A_x\eta_x). \end{cases}$$

Le volume engendré par le même contour, tournant autour d'un axe passant par O et de cosinus directeurs λ, μ, ν est, toujours d'après (2),

$$\lambda V_x + \mu V_y + \nu V_z.$$

6. Reprenons maintenant l'axe absolument quelconque AB et les aires planes A_x, A_y, A_z situées dans les plans coordonnés. Ces aires planes, tournant autour de AB, donnent des volumes qui sont respectivement, encore d'après (2),

$$(4)\qquad \begin{cases} W_x = 2\pi A_x[\mu(\zeta_x - c) - \nu(\eta_x - b)], \\ W_y = 2\pi A_y[\nu(\xi_y - a) - \lambda(\zeta_y - c)], \\ W_z = 2\pi A_z[\lambda(\eta_z - b) - \mu(\xi_z - a)]. \end{cases}$$

Donc la formule (2) peut s'écrire

$$V = W_x + W_y + W_z. \tag{5}$$

Le volume engendré par un contour fermé quelconque, tournant autour d'un axe quelconque, est la somme des trois volumes engendrés par la rotation, autour du même axe, des trois contours plans obtenus en projetant le contour considéré sur trois plans rectangulaires quelconques.

Il est à peine besoin de dire que, dans cet énoncé, il ne faut pas se représenter une somme de volumes comme une somme de termes toujours positifs; nos volumes ont des signes qu'ils prennent tout naturellement quand on calcule les seconds membres des expressions (4).

Par les centres de gravité G_x, G_y, G_z appartenant respectivement aux aires planes A_x, A_y, A_z, élevons des perpendiculaires aux plans de ces aires et soient δ_x, δ_y, δ_z les plus courtes distances de ces droites à l'axe AB. On a

$$\left\{\begin{aligned} \mu(\zeta_x - c) - \nu(\eta_x - b) &= \delta_x\sqrt{\nu^2 + \mu^2} = \delta_x \sin\theta_x, \\ \nu(\xi_y - a) - \lambda(\zeta_y - c) &= \delta_y\sqrt{\lambda^2 + \nu^2} = \delta_y \sin\theta_y, \\ \lambda(\eta_z - b) - \mu(\xi_z - a) &= \delta_z\sqrt{\mu^2 + \lambda^2} = \delta_z \sin\theta_z, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

si θ_x, θ_y, θ_z sont les angles de AB avec Ox, Oy, Oz. Les formules (4) peuvent donc s'écrire

$$\left\{\begin{aligned} W_x &= 2\pi\,\delta_x A_x \sin\theta_x, \\ W_y &= 2\pi\,\delta_y A_y \sin\theta_y, \\ W_z &= 2\pi\,\delta_z A_z \sin\theta_z. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Sous cette forme, l'une quelconque des trois exprime un théorème de M. Kœnigs qu'on peut énoncer ainsi : *Soient une aire plane* A, *une normale* N *en son centre de gravité, un axe* Δ *quelconque dans l'espace et* δ *la plus courte distance de* N *et de* Δ. *Le volume engendré par l'aire* A, *tournant autour de* Δ, *est égal au produit de la circonférence* $2\pi\delta$ *par la projection de cette aire* A *sur le plan contenant* Δ *et* δ (*loc. cit.*, p. 341).

Si maintenant on reprend (5), on a

$$V = 2\pi(\delta_x A_x \sin\theta_x + \delta_y A_y \sin\theta_y + \delta_z A_z \sin\theta_z)$$

ou, en abrégé,

$$V = 2\pi \sum \delta A \sin\theta.$$

Je ne sais si cette forme symbolique du résultat général a déjà été donnée. Elle a, à coup sûr, quelque importance, le volume engendré par un contour *quelconque* tournant autour d'un axe *quelconque* étant ainsi présenté sous une forme presque aussi simple que celle du théorème de Guldin ordinaire ; on la retiendrait, tout au moins, sans beaucoup plus d'efforts.

Mais ce n'est cependant pas là un véritable résultat géométrique ; il provient de la combinaison des deux théorèmes mis en italique dans le présent paragraphe. Le second est purement géométrique alors qu'il n'en est pas de même du premier; celui-ci exige l'emploi des expressions (4) ou (7) qui ne sont nettement calculables, quant aux signes, qu'avec un usage de coordonnées étranger aux données de la question. M. Kœnigs a fait, en somme, la même remarque quant à son système de vecteurs (*ibidem*).

En pratique, si l'on avait à évaluer un volume tournant quelconque, je crois que le plus simple serait de prendre l'axe de rotation pour axe Oz et d'appliquer alors la dernière formule (3), soit

$$V_z = 2\pi(A_y \xi_y - A_x \eta_x). \tag{8}$$

Elle me paraît pouvoir expliquer certaines équivalences de volumes qui ne l'ont peut-être pas été par cette voie.

7. Soit une surface de révolution d'axe Oz sur laquelle nous tracerons, dans le trièdre positif $Oxyz$, un contour fermé simplement connexe; si ce contour tourne autour de Oz, en glissant sur la surface, il est clair qu'il n'engendre qu'un volume nul. Dans ce cas, la formule (8) donne

$$2\pi A_y \xi_y = 2\pi A_x \eta_x.$$

Étant donnés un dièdre rectangulaire et une surface de révolution autour de son arête Δ, *un contour fermé tracé sur la surface, à l'intérieur du dièdre, se projette sur les faces de celui-ci suivant des contours qui, en tournant autour de* Δ, *engendrent des volumes égaux.*

Soient, par exemple, la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

et le cylindre, de génératrices parallèles à Oy,

$$x^2 + z^2 - Rx = 0. \tag{9}$$

Dans le dièdre formé par les plans zOx, zOy, l'intersection est l'une des boucles de la courbe bien connue de Viviani. Cette boucle se projette sur zOx suivant le cercle (9) et sur zOy suivant la lemniscate de Gérono

$$y^4 - R^2 y^2 + R^2 z^2 = 0. \tag{10}$$

Donc *la lemniscate de Gérono* (10) *tournant autour de son axe* Oz *engendre un volume égal à celui d'un tore dû à la rotation d'un cercle de diamètre* R *autour de sa tangente.*

J'ai vérifié par un calcul direct fort élémentaire.

Conservant le cylindre (9), mais remplaçant la sphère par d'autres surfaces de révolution, on voit qu'on pourrait déterminer une infinité d'autres volumes tournants équivalents au tore. Plus généralement, par le choix d'un premier volume tournant, on peut en connaître une infinité d'autres. Le théorème du présent paragraphe n'est certainement pas le seul qui puisse donner un tel résultat, mais il le donne d'une manière géométrique qui m'a semblé digne de remarque.

MÉLANGES.

SUR LE PROBLÈME DU REFROIDISSEMENT DE LA CROUTE TERRESTRE, CONSIDÉRÉ A LA MANIÈRE ET SUIVANT LES IDÉES DE FOURIER;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

SOMMAIRE. — I. Exposé de la question et formules fondamentales. — II. Calcul approximatif de l'influence du climat sur la vitesse d'accroissement de la température avec la profondeur sous le sol. — III. Extrême lenteur du refroidissement dans les parties profondes de la croûte. — IV. Tentative pour apprécier, à partir d'une certaine époque, les progrès de la solidification à la base de la croûte. — Inconvénients de la solution de Fourier en série trigonométrique (Note). — V. Résolution des difficultés, par l'hypothèse simple et naturelle d'une épaisseur nulle de la croûte, au début du refroidissement.

I. *Exposé de la question et formules fondamentales.*

1. Dans le problème du refroidissement de la croûte terrestre, nous supposerons ici, suivant le sens des idées de Fourier et de ses contemporains astronomes ou géologues relativement au feu central, mais en y précisant les hypothèses plus qu'il ne le faisait lui-même :

1° Que la croûte terrestre, comprise entre deux sphères concentriques, ait une épaisseur uniforme E de quelques myriamètres seulement (comme une dizaine), ou, par suite, vu la grandeur du rayon, une courbure insignifiante sur des longueurs et largeurs comparables à son épaisseur, de manière à pouvoir y être assimilée à un *plateau* horizontal;

2° Qu'elle repose sur la sphère en fusion, liquide ou pâteuse, dont l'aurait extraite une solidification censée *très rapide*, à l'époque, choisie comme origine des temps t, où toute la masse, jusqu'à de notables distances dans l'intérieur, avait sensiblement la température u_0 *de fusion* encore existante, actuellement, sous la croûte.

C'est à peu près ainsi que j'ai déjà envisagé cette question dans

la XXIIe de mes Leçons sur la *Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière* (t. II, p. 12 à 24; Gauthier-Villars, Paris, 1903). J'y ai effectué, pour toutes les profondeurs x sous le sol, l'intégration qui fait connaître les températures ultérieures u, au lieu de me borner avec Fourier à la surface $x = 0$, mais en admettant comme lui que, dans les régions inférieures de la croûte, ces températures tendent vers la constante u_0 à la manière d'un *rapprochement asymptotique*, admissible *physiquement* ou sensiblement (mais non avec une rigueur analytique) en tant que réduction à u_0 pour $x = E$: nuance négligeable aux yeux de l'observateur, mais éminemment simplificatrice au point de vue des calculs.

D'ailleurs, afin de réduire ce problème à ses éléments essentiels, Fourier y fait abstraction de toutes les particularités qui constituent soit les *saisons*, soit les *climats*, ou attribuables à l'action solaire, et dont il suppose qu'on tiendra compte à part. Aussi ai-je considéré, dans cette XXIIe leçon, le refroidissement de la croûte ou même de la sphère, comme il aurait eu lieu en l'absence du soleil, sans autre influence thermique extérieure que celle des espaces célestes où s'entrecroisent les rayons stellaires.

Or je me suis aperçu depuis qu'il n'était pas nécessaire, pour réduire la question à son expression la plus simple, d'y faire ainsi abstraction de toute action solaire; ce qui avait l'inconvénient d'introduire, comme température extérieure à considérer, celle des régions interplanétaires ou interstellaires, qui nous est inconnue. Il suffit d'y défalquer, des températures *effectives* mesurables, que j'appellerai v, la partie due aux *inégalités* de l'action solaire, ou, plutôt, des actions *thermiques extérieures au globe*, quelles qu'elles soient, en laissant subsister la partie *moyenne et constante* de ces actions.

2. D'une manière plus précise, imaginons que l'on mesure à chaque instant la température extérieure *effective* u_e sur un élément quelconque $d\sigma$ de la surface σ du sol [1]; puis, que l'on

[1] Nous nous bornerons aux portions *émergées* ou même continentales de la croûte, en admettant, quand la latitude λ devra intervenir, une proportion à peu près pareille de terre et d'eau à toutes les latitudes.

prenne, pour le même élément $d\sigma$, la moyenne de ces températures successives u_e, durant quelques années tant avant qu'après l'époque t considérée, moyenne que nous appellerons u_{em} (c'est-à-dire température *extérieure moyenne* locale) et que nous regarderons comme indépendante de t *durant toute l'évolution à considérer du globe*. Car, en dehors de cette hypothèse simple, la question traitée n'aurait plus une signification précise.

C'est la moyenne générale des valeurs de u_{em} pour toute l'aire (émergée) σ du sol terrestre censé nivelé, température évaluable ou dont on a une idée nette, qui exprimera l'action thermique générale, sur la croûte terrestre, de toutes les causes extérieures susceptibles de la modifier.

Nous choisirons, dans la question, cette température moyenne générale au ras du sol, comme origine ou *zéro* du thermomètre. D'où il suit que, désormais, u_{em} s'annulera *en moyenne*, ou que ses valeurs encore subsistantes constitueront une *pure inégalité*, dans l'*espace* σ, de l'action thermique extérieure, de même que la différence $u_e - u_{em}$ représente, dans le *temps* t, pour chaque *contrée* $d\sigma$, une pure inégalité à valeur moyenne également nulle. Nous appellerons celle-ci, pour abréger, u_{ep}, c'est-à-dire partie *périodique* de la température extérieure u_e; car elle comprendra principalement des termes proportionnels aux cosinus et aux sinus d'arcs kt en raison directe du temps t, cosinus et sinus à périodes sous-multiples soit du jour, soit de l'année.

Nous aurons ainsi

$$u_e = u_{em} + u_{ep}.$$

Or, à la partie permanente u_{em} de la température extérieure, on peut faire correspondre, dans la croûte terrestre, des températures partielles, u_m, s'annulant sur sa face inférieure, permanentes aussi; et, à la partie périodique u_{ep}, des températures partielles u_p de mêmes périodes, s'annulant encore à la face inférieure et qu'exprimeront des termes où le temps t n'entrera que par les mêmes cosinus et sinus des arcs kt.

Ce sont précisément ces deux inégalités u_m, u_p, tant permanente que composée de termes périodiques et même *pendulaires* en t, qu'il faudra retrancher ou défalquer de toutes les températures effectives intérieures v, pour ramener à sa forme la plus simple le problème de Fourier sur le refroidissement de la croûte terrestre.

3. Ajoutons que v, u_m, u_p offriront le caractère commun de varier, d'un point à l'autre, bien plus lentement suivant les sens horizontaux que suivant la verticale, même dans le plan méridien où leurs variations le long d'une ligne de niveau, dues au changement de la latitude λ, seront le plus grandes. En effet, les deux températures extérieures partielles u_{em}, u_{ep} et, par suite, la température intérieure v, ainsi que ses parties u_m, u_p, ne varieront guère, au plus, que d'une cinquantaine de degrés centigrades, entre chaque pôle et l'équateur, sur un parcours de 1000^{Mm}, soit, en moyenne, de $0^{\circ},0005$ par hectomètre, tandis que, suivant le sens vertical descendant, v croît, comme on sait, d'au moins 3° par hectomètre, ou presque 10000 fois plus vite, et que u_m, u_p décroîtront de la totalité de leurs valeurs le long du parcours vertical E allant du sol au fond de la croûte, parcours qui, même en le supposant de 10^{Mm}, n'est que le 0,01 de la distance du pôle à l'équateur.

C'est dire que, sur toute la portion de la croûte terrestre qui sera à considérer, ou d'une longueur et d'une largeur seulement comparables à l'épaisseur E, non seulement les deux bases, avec les couches sphériques intermédiaires, pourront, dans nos calculs forcément *approximatifs*, être supposées planes; mais, de plus, u_{em}, u_{ep} seront uniformes et v, u_m, u_p ne varieront que d'un plan horizontal à l'autre, ou en fonction d'une abscisse verticale descendante x, comptée à partir du sol, non suivant les sens normaux à cette abscisse.

Si nous faisons abstraction des actions chimiques ayant leur siège dans la croûte terrestre, et que a soit la racine carrée positive du quotient $\frac{K}{C}$ de la conductibilité intérieure K de la croûte par la capacité calorifique C de son unité de volume, l'équation indéfinie des températures se réduira donc, pour v, u_m, u_p respectivement, à celles-ci :

$$(1)\qquad \frac{dv}{dt} = a^2\frac{d^2v}{dx^2}, \qquad 0 = a^2\frac{d^2u_m}{dx^2}, \qquad \frac{du_p}{dt} = a^2\frac{d^2u_p}{dx^2}.$$

Il faudra y joindre les conditions ordinaires, relatives au sol et au fond de la croûte :

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{lll} (\text{pour } x = 0) & \frac{1}{h}\frac{dv}{dx} = v - (u_{em} + u_{ep}), & \\ & \frac{1}{h}\frac{du_m}{dx} = u_m - u_{em}, & \frac{1}{h}\frac{du_p}{dx} = u_p - u_{ep}, \end{array}\right.$$

où h désigne le quotient de la conductibilité extérieure k par la conductibilité intérieure K (*);

$$(3) \qquad (\text{pour } x = \mathrm{E}) \qquad v = u_0, \qquad u_m = 0, \qquad u_p = 0.$$

4. Ces relations, en tenant compte de ce que u_p se compose de termes de la forme $\mathrm{U}\cos kt + \mathrm{V}\sin kt$ avec U et V fonctions de x, déterminent complètement u_m et u_p. Elles donnent en effet, pour u_p, les termes évalués dans ma XIVe leçon (t. I, p. 210 à 228), qui deviennent insensibles, ou s'évanouissent physiquement, non seulement au fond $x = \mathrm{E}$, mais à toutes les profondeurs x excédant une quinzaine de mètres. Quant à u_m, dont la dérivée en x est visiblement constante de la surface au fond, elles lui attribuent presque sans calculs la formule

$$(4) \qquad u_m = \frac{h\mathrm{E}}{1 + h\mathrm{E}}\, u_{em}\left(1 - \frac{x}{\mathrm{E}}\right).$$

A la surface $x = 0$ du sol, u_m a donc l'expression $\frac{h\mathrm{E}}{1 + h\mathrm{E}}\, u_{em}$, fraction constante de u_{em}. D'où il suit que la différence $u_{em} - u_m$, en raison directe de laquelle est le flux de chaleur entrant dans le sol (par unités d'aire et de temps) du fait de la température

(*) Ces conditions définies *linéaires*, surtout quand on y attribue à h la valeur unique 1,2 admise par Fourier, ne conviennent guère que pour des différences de température, entre le dedans et le dehors, beaucoup plus faibles que celles dont il sera question. Mais j'ai pensé devoir suivre ici Fourier, toute hypothèse plus voisine de la réalité rendant les intégrations inabordables. Du reste, la valeur $h = 1,2$ revient presque, *quant aux résultats concrets*, à prendre h infini, ou à supposer que la surface $x = 0$ se refroidit *par contact*, hypothèse que l'on pourrait faire tout de suite si l'on tenait à simplifier le plus possible les calculs. Mais les relations (2) ont l'avantage d'être plus générales sans rendre la question bien difficile.

L'hypothèse $h = \infty$ d'un refroidissement par *contact*, avec température superficielle uniformément nulle, aurait l'avantage de rendre nos formules [alors condensées dans celle du n° 13 ci-après qui est notée (25 *bis*)] applicables en première approximation aux parties *immergées* de la croûte terrestre et à celles qui sont *alternativement immergées et émergées*, non moins qu'aux parties *constamment émergées*. Car les différences et les variations de leurs températures de superficie ne sont presque rien à côté de la température u_0 de fusion existant sous la croûte.

Donc, à une première approximation, le refroidissement peut être censé se faire de même tout autour du centre : ce qui, au besoin, motiverait notre hypothèse d'une épaisseur E uniforme pour toute la croûte.

extérieure permanente u_{em}, se trouve elle-même proportionnelle à u_{em}. Et, comme la valeur moyenne de u_{em} sur la totalité σ du sol terrestre (émergé) s'annule, le flux moyen correspondant sera nul aussi. Donc le sol gagne constamment, en vertu de la température extérieure permanente u_{em}, autant de chaleur par ses éléments $d\sigma$, où cette température est positive, qu'elle en perd par ceux où elle est négative.

5. Cela posé, retranchons $u_m + u_p$ de v, en appelant u ce qui reste alors des températures effectives v. Cet excédent u vérifiera les relations qu'on obtient en multipliant respectivement par 1, -1 et -1 soit les équations (1), soit les conditions définies (2), soit les conditions (3), et puis, en faisant les trois sommes terme à terme. Il vient ainsi, pour régir l'excédent *u qu'on se proposait justement d'étudier*.

$$(5)\quad \frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (\text{pour } x = 0)\ \frac{1}{h}\frac{du}{dx} = u, \quad (\text{pour } x = \text{E})\ u = u_0.$$

Or nous savons que, du moins pour $t > 0$, elles détermineront u, si l'on fait connaître, en outre, les valeurs de u *initiales* ou relatives à $t = 0$.

Appelons u_p^0 la fonction de x à laquelle se réduit u_p pour $t = 0$ et souvenons-nous, d'une part, que u_m ne dépend pas de t, d'autre part, que les températures intérieures v ont débuté, suivant l'hypothèse ordinaire acceptée ici, par être la température constante u_0 de fusion de la croûte terrestre (comptée par nous à partir de la température moyenne *générale* extérieure, qui a été choisie comme zéro).

On a donc

$$(6)\qquad (\text{pour } t = 0)\qquad u = u_0 - u_m - u_p^0.$$

Mais u_m, de valeur moyenne nulle pour chaque profondeur x, et u_p^0, qui oscille à peu près autour de zéro, n'excèdent nulle part, en valeur absolue, quelque chose comme une trentaine de degrés centigrades, et seront des fractions insignifiantes de la température u_0 de fusion des roches. Donc, comme la loi des échanges de chaleur, tant à l'intérieur des corps qu'à travers leurs surfaces, y efface à la longue les inégalités de température, au point même

d'avoir fait, à l'époque actuelle, disparaître l'énorme différence u_0 entre le dedans et le dehors, du moins aux distances modérées x du sol, à plus forte raison cette loi a-t-elle eu plus ou moins tôt annihilé ou *nivelé* les très médiocres inégalités u_m et u_p^0, savoir, pleinement pour u_p^0, qui est insensible aux profondeurs excédant une quinzaine de mètres, et sauf, pour u_m, vers le bas de la croûte, où la très faible conductibilité des roches doit ralentir presque sans limite le refroidissement. Il n'a dû ainsi rester, dans les régions qui nous sont accessibles et dont on aura le plus à s'occuper, c'est-à-dire à ces distances modérées x de la surface où le voisinage de celle-ci facilite le refroidissement, aucune trace appréciable des minimes différences relatives qui y distinguaient initialement u de la température u_0 de fusion de la croûte.

Donc la condition (6) peut être remplacée sans erreur appréciable, du moins à toutes les distances x observables pour nous et bien au delà, par celle-ci :

$$(7) \qquad (\text{pour } t = 0) \qquad u = u_0.$$

6. Or, alors, le problème défini par le système (5) et (7) se trouve être précisément celui auquel satisfait l'intégrale (29) de la XXIIe Leçon de mon Cours (t. II, p. 17), savoir

$$(8) \quad u = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\psi(0) - \psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + e^{h^2a^2t+hx}\psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t}\right)\right],$$

où ψ est la fonction de Krampf,

$$(9) \qquad \psi(\omega) = \int_\omega^\infty e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

Et cette intégrale, en raison de la rapide tendance de $\psi(\omega)$ vers sa forme asymptotique $\frac{e^{-\omega^2}}{2\omega}$, vérifiera sans écart perceptible la condition relative au fond, $u = u_0$, non seulement pour $x = E$, mais même dans toute une épaisseur finie près du fond, comme on verra plus loin (n° 13).

On aura donc bien, pour la partie u des températures afférente au refroidissement proprement dit, l'expression (8), qui, à la surface $x = 0$, où nous appellerons u' la valeur de u, se réduit bien à

la formule de Fourier [1]

$$(10) \qquad u' = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} e^{h^2a^2t} \psi(ha\sqrt{t}).$$

II. *Calcul approximatif de l'influence du climat sur la vitesse d'accroissement de la température avec la profondeur sous le sol.*

7. Par suite, les températures effectives v seront, en y négligeant leur partie périodique u_p qui n'intéresse qu'une mince couche superficielle, mais en y tenant compte de l'inégalité permanente u_m donnée par (4),

$$(11) \quad v = \frac{hE}{1+hE} u_{em}\left(1 - \frac{x}{E}\right) - \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}}\left[\psi(0) - \psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + e^{h^2a^2t+hx}\psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t}\right)\right].$$

Aux petites profondeurs x, où la dérivée $\frac{du}{dx}$ se confond presque avec sa valeur hu' relative à la surface et où, par suite,

$$u = u' + hu'x = u'(1+hx) = \frac{2u_0}{\sqrt{\pi}} e^{h^2a^2t}\psi(ha\sqrt{t})(1+hx),$$

il viendra

$$(12) \qquad v = \left(u' + \frac{hE}{1+hE}u_{em}\right) + \left(u' - \frac{u_{em}}{1+hE}\right)hx,$$

ou bien, avec une valeur de h comme celle qu'adopte Fourier, $h = \frac{6}{5} = 1,2$ (le mètre étant l'unité de longueur), et qui fait le produit hE en quelque sorte infini à côté de 1,

$$(13) \qquad v = (u' + u_{em}) + \left(hu' - \frac{u_{em}}{E}\right)x.$$

8. La température extérieure moyenne u_{em} des diverses régions terrestres (émergées) admet probablement, en fonction de la latitude λ, une expression simple, *approximative*, proportionnelle au

---

[1] *Œuvres de Fourier*, t. II, p. 277, formule (5).

binome $1 - \alpha \sin^2\lambda$, si α y désigne une constante positive convenablement choisie. D'autre part, la zone comprise, par exemple, sur l'hémisphère où λ est positif, entre l'équateur et le parallèle de latitude λ, aura sa hauteur et, par conséquent, son aire, visiblement proportionnelles à $\sin\lambda$; d'où il suit que, dans le calcul de la valeur moyenne de u_{em} sur l'hémisphère considéré (ou sur toute la surface terrestre), la zone élémentaire comprise entre cette latitude λ et la latitude voisine $\lambda + d\lambda$ entrera par une somme proportionnelle à $(1 - \alpha \sin^2\lambda) d \sin\lambda$, et que cette moyenne générale de u_{em}, égale à zéro par définition, sera elle-même, à un facteur constant près différent de zéro,

$$\int_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} (1 - \alpha \sin^2\lambda)\, d \sin\lambda = \left(\sin\lambda - \frac{\alpha}{3}\sin^3\lambda\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\alpha}{3} \quad (^1).$$

Son annulation donne $\alpha = 3$.

Donc les températures permanentes u_{em} pourront être censées proportionnelles au binome $1 - 3\sin^2\lambda$, maximum et égal à 1 pour $\lambda = 0$, minimum et égal à -2 pour $\lambda = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, la plus forte valeur négative de u_{em} (aux pôles) sera le double de la plus forte valeur positive (à l'équateur); et si la variation totale de u_{em} est 51° (nombre paraissant résumer les observations les plus précises), ces deux valeurs extrêmes seront respectivement $-34°$ et 17°.

Entre les deux, u_{em} s'annulera pour $\sin^2\lambda = \frac{1}{3}$ ou pour

$$\operatorname{tang}\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \sin 45°, \qquad \lambda = \pm 35°\,16' \text{ environ};$$

de sorte que la zone *équatoriale*, à valeurs de u_{em} positives, sera la fraction $\frac{1}{\sqrt{3}} = 0,5773$, ou près des $\frac{3}{5}$, de la sphère totale, soit une fois et demie environ le reste, à valeurs de u_{em} négatives.

9. Faisons, pour fixer les idées, u_0 égal à la température présumée de fusion du fer, 1600° (²); ce qui conduirait à prendre

(¹) Je rappellerai que nous admettons une proportion de *terre* et d'*eau* à peu près pareille à toutes les latitudes.

(²) C'est le nombre qu'indique l'*Annuaire du Bureau des longitudes pour* 1912,

$E = 30^m \times 1600 = 48000^m$ environ, si la proportion de 1° d'augmentation de la température par 30^m de parcours vertical descendant, constatée en moyenne près de la surface $x = 0$ et à l'époque actuelle, se maintenait dans toute la profondeur E de la croûte. Mais, comme il est clair que cette proportion doit tendre vers zéro dans le bas, à mesure qu'on approche des couches inférieures non refroidies encore, la proportion *moyenne* sur toute l'épaisseur E ne pourra probablement pas être même la moitié de 1° par 30^m; et l'épaisseur E de la croûte excédera, semble-t-il, le double de 48000^m. Prenons donc, en nombre rond, $E = 100000^m$.

Alors la formule (13) donnera, près du sol, comme rapidité actuelle d'accroissement de la température avec la profondeur, et vu, finalement, que la valeur moyenne de u_{em} est nulle,

$$(14) \quad (\text{pour } x = 0) \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1^\circ}{30} - \frac{u_{em}}{100000} = \frac{1^\circ}{30}(1 - 0{,}0003\, u_{em}).$$

10. Aux pôles, où l'on admet $u_{em} = -34^\circ$, la rapidité considérée d'accroissement se trouvera donc augmentée par u_{em}, c'est-à-dire par *l'inégalité permanente de l'action solaire*, d'environ $\frac{1}{100}$ de sa valeur moyenne. A l'équateur, où l'on prend $u_{em} = 17^\circ$, elle est, au contraire, réduite par la même inégalité, mais dans un rapport moitié moindre. A la latitude de 45°, où nous faisons $u_{em} = -8^\circ\frac{1}{2}$,

---

p. 469. Peut-être, d'après les déterminations les plus récentes des physiciens chimistes (donnant 1505°), y aurait-il lieu d'en retrancher presque une centaine de degrés. Comme, d'autre part, notre zéro de température propre à la question correspond à 17°, — 34° et — 34° de température moyenne à l'équateur, au pôle Nord et au pôle Sud, au lieu de 27°, — 23° et — 25° centigrades que les météorologistes déduisent à très peu près des observations les plus multipliées et les plus précises, notre zéro doit excéder d'environ 10° le point de fusion de la glace. Il faudrait donc, ce semble, retrancher en tout 105 du nombre 1600 admis ci-dessus, ou poser, dans nos calculs, $u_0 = 1495^\circ$. Mais il n'en résulterait pas, nécessairement, de réduction à effectuer sur l'épaisseur E de la croûte, qu'on pourrait encore supposer, *en nombre rond*, de 10 myriamètres; car cette épaisseur paraît assez devoir excéder, dans un rapport quelque peu *notable*, le double du produit

$$30^m \times (1600^\circ - 105^\circ) = 44850^m.$$

La valeur $E = 100000^m$ conviendrait donc, peut-être, autant que pour $u_0 = 1600^\circ$. Or il n'y avait lieu, ici, de se donner u_0 que pour arriver à une valeur approximative de E.

la proportion dont il s'agit se trouve un peu accrue, mais le quart seulement comme aux pôles [1].

En résumé, dans l'hypothèse communément admise (même de nos jours) d'une croûte terrestre assez mince, reposant sur la masse en fusion ou pâteuse d'où cette croûte serait sortie par voie d'une solidification rapide, l'inégalité permanente de l'action solaire, ou la différence des climats due à cette inégalité, n'influent que très peu sur la rapidité d'accroissement des températures terrestres avec la profondeur sous le sol.

III. *Extrême lenteur du refroidissement dans les parties profondes de la croûte.*

11. Vérifions encore qu'avec les données indiquées ci-dessus pour E, u_0 et h, la condition $v = u_0$ au bas de la croûte n'a pas cessé d'être satisfaite physiquement par notre formule (11) depuis l'origine du refroidissement. Mais, pour cela, je démontrerai d'abord l'expression asymptotique vers laquelle tend, quand ω grandit, l'intégrale $\psi(\omega)$ définie par (9), et j'évaluerai approximativement celle-ci.

Remplaçons, dans (9), la variable α d'intégration, en posant

$$\alpha = \omega + \frac{\beta}{2\omega},$$

par une autre β propre à rendre constante la limite inférieure. Il vient

$$\psi(\omega) = \frac{e^{-\omega^2}}{2\omega} \mathrm{I}, \tag{15}$$

si l'on pose successivement, en faisant, à la fin, $e^{-\beta} = \gamma$,

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty e^{-\beta - \frac{\beta^2}{4\omega^2}} d\beta = \int_{\beta=\infty}^{\beta=0} e^{-\frac{\beta^2}{4\omega^2}} d\, e^{-\beta} = \int_0^1 e^{-\frac{1}{4\omega^2}\left(\log\frac{1}{\gamma}\right)^2} d\gamma. \tag{16}$$

Il est visible qu'ici, sous le signe $\int$, l'exponentielle, moindre

---

[1] On sait que l'Europe occidentale jouit d'un climat plus doux, grâce au *Gulf Stream* : l'accroissement de sa température moyenne dû à ce courant chaud océanique peut bien atteindre une dizaine de degrés.

que 1, tend vers l'unité quand ω croît de zéro à l'infini (sauf infiniment près de la limite inférieure $\gamma = 0$). Donc I grandit en même temps de zéro à 1; et $\psi(\omega)$ tend, avec un écart relatif évanouissant ε, vers l'expression $\frac{e^{-\omega^2}}{2\omega}$, approchée d'ailleurs par excès.

On développe aisément l'écart relatif ε, c'est-à-dire $1 - I$, suivant les puissances ascendantes de $\frac{1}{4\omega^2}$, en intégrant I par parties un nombre indéfini de fois, sous la condition de prendre sans cesse l'exponentielle comme facteur non intégré. Le facteur intégré est, chaque fois, de la forme $\int f\left(\log\frac{1}{\gamma}\right) d\gamma$, où f désigne un polynome à degrés successifs 0, 1, 2, 3, ...; ce qui donne

$$\int f\left(\log\frac{1}{\gamma}\right) d\gamma = \gamma f\left(\log\frac{1}{\gamma}\right) + \gamma f'\left(\log\frac{1}{\gamma}\right) + \gamma f''\left(\log\frac{1}{\gamma}\right) + \ldots.$$

Par exemple, en se bornant à la première intégration par parties, il vient

$$(17) \qquad \varepsilon = 1 - I = \frac{1}{2\omega^2}\int_0^1 e^{-\frac{1}{4\omega^2}\left(\log\frac{1}{\gamma}\right)^2}\left(\log\frac{1}{\gamma}\right) d\gamma < \frac{1}{2\omega^2}.$$

Le dernier membre s'obtient en remplaçant l'exponentielle par sa valeur la plus forte 1 et intégrant $\left(\log\frac{1}{\gamma}\right) d\gamma$; ce qui donne $\left(\gamma\log\frac{1}{\gamma} + \gamma\right)_0^1$ ou 1.

Mais effectuons encore, sur le troisième membre de (17), l'intégration par parties indiquée. Nous aurons

$$(18) \qquad \varepsilon = \frac{1}{2\omega^2} - \frac{1}{4\omega^4}\int_0^1 e^{-\frac{1}{4\omega^2}\left(\log\frac{1}{\gamma}\right)^2}\left[\left(\log\frac{1}{\gamma}\right)^2 + \log\frac{1}{\gamma}\right] d\gamma.$$

L'intégrale par laquelle se termine ici le second membre est visiblement moindre que

$$\int_0^1 \left[\left(\log\frac{1}{\gamma}\right)^2 + \log\frac{1}{\gamma}\right] d\gamma = \left[\gamma\left(\log\frac{1}{\gamma}\right)^2 + 3\gamma\log\frac{1}{\gamma} + 3\gamma\right]_0^1 = 3.$$

Par suite, si l'on appelle ε' l'excédent positif de $\frac{1}{2\omega^2}$ sur ε, l'erreur relative par excès, ε, de l'expression asymptotique $\frac{e^{-\omega^2}}{2\omega}$

sera

$$(19)\qquad \varepsilon = \frac{1}{2\omega^2} - \varepsilon', \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon' < \frac{3}{4\omega^4} = \frac{1}{2\omega^2}\,\frac{3}{2\omega^2}.$$

Et il y aura lieu de prendre $\varepsilon = \frac{1}{2\omega^2}$, c'est-à-dire

$$(20)\qquad \psi(\omega) = \frac{e^{-\omega^2}}{2\omega}\left(1 - \frac{1}{2\omega^2}\right),$$

plutôt que la simple expression asymptotique, toutes les fois que $2\omega^2$ surpassera 3, ou que ω excédera $1,2247$.

12. Voyons maintenant si notre hypothèse de la conservation, jusqu'à l'époque actuelle, de la température primitive u_0 au fond de la croûte, se trouve bien *physiquement* vérifiée par nos formules.

D'après nos expressions (11) de v et (8) de u, où il faudra faire $x = E = 1000\,00^{m}$, $h = 1,2$, et où d'ailleurs nous pourrons mettre $\psi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ en facteur commun dans la quantité entre crochets, puis diviser par u_0, nous aurons

$$(21)\quad \text{(au fond)}\quad \frac{v}{u_0} \quad \text{ou} \quad \frac{u}{u_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\psi\left(\frac{E}{2a\sqrt{t}}\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{h^2a^2t + hE}\,\psi\left(\frac{E}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t}\right).$$

Cherchons d'abord la plus forte valeur du dernier terme, dans lequel nous poserons, pour abréger, $a\sqrt{t} = \mu$, et qui est alors

$$(22)\qquad \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,e^{h^2\mu^2 + hE}\,\psi\left(\frac{E}{2\mu} + h\mu\right).$$

La fonction ψ y sera toujours réductible à sa forme asymptotique. Car la variable de cette fonction, $\frac{E}{2\mu} + h\mu$, a pour dérivée (en μ) $-\frac{E}{2\mu^2} + h$; et elle atteint, pour $\mu = \sqrt{\frac{E}{2h}}$, son minimum, qui est

$$\sqrt{2hE} = \sqrt{240000} = 489,9,$$

valeur bien plus grande qu'il ne faut pour rendre $\psi(\sqrt{2hE})$

physiquement réductible à la forme asymptotique $\frac{e^{-2hE}}{2\sqrt{2hE}}$. Il en sera de même, à plus forte raison, pour toutes les autres valeurs de t ou de μ; et l'on pourra ainsi remplacer (22), après une réduction évidente, par

$$(23)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{E^2}{4\mu^2}}}{\left(\frac{E}{2\mu}+h\mu\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,e^{\frac{E^2}{4\mu^2}}\left(\frac{E}{2\mu}+h\mu\right)}.$$

Or nous allons reconnaître que cette expression est toujours *physiquement* négligeable devant l'unité; car, nulle aux deux limites $\mu = 0$, $\mu = \infty$, elle *a même* son maximum (intermédiaire) absolument insensible. La valeur de μ pour laquelle ce maximum se produit est celle qui annule la dérivée en μ du dénominateur $e^{\frac{E^2}{4\mu^2}}\left(\frac{E}{2\mu}+h\mu\right)$; ce qui donne, toutes réductions faites,

$$(2\mu^2)^2 - \left(E^2+\frac{E}{h}\right)(2\mu^2) - \frac{E^3}{h} = 0.$$

Résolvons donc cette équation bicarrée, sans oublier les valeurs numériques, 100000, 1,2, de E et de h. Nous aurons

$$2\mu^2 = \frac{1}{2}\left(E^2+\frac{E}{h}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(E^2+\frac{E}{h}\right)^2 + \frac{E^3}{h}} = (\text{très sensiblement})\,E^2;$$

d'où

$$\mu = \frac{E}{\sqrt{2}},\qquad \frac{E}{2\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Enfin, le maximum de (23) ou du terme (22) devient successivement

$$(24)\qquad \frac{1}{\sqrt{\pi e}}\,\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+h\frac{E}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{2}{\pi e}}\,\frac{1}{1+hE}$$

$$= (\text{sensiblement})\sqrt{\frac{2}{\pi e}}\,\frac{1}{hE} = \frac{0,4839}{hE} = \frac{0,4033}{E}.$$

Puisqu'on prend $E = 100000$, ce maximum vaut environ 4 millionièmes d'unité, quantité qui est bien, physiquement, négligeable à côté de 1.

13. La formule (21) donnera donc simplement, pour le rapport de la température v ou u produite, d'après notre intégrale, sur le fond de la croûte, à sa valeur primitive u_0,

$$(25) \qquad \text{(au fond)} \qquad \frac{u}{u_0} \quad \text{ou} \quad \frac{v}{u_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\psi\left(\frac{E}{2a\sqrt{t}}\right) \quad (^1).$$

Or celui-ci décroît sans cesse quand t grandit. On pouvait le prévoir. Car notre intégrale (8), ne faisant vérifier *qu'asymptotiquement* la condition $u = u_0$ au fond, doit y abaisser très graduellement la température à mesure que progresse le refroidissement général. La complication des formules aurait d'ailleurs été bien plus grande, s'il avait fallu nous astreindre à conserver en toute rigueur, pour $x = E$, la valeur u_0 de u.

Il est, toutefois, aisé de reconnaître que, eu égard à l'approximation requise ici, le décroissement relatif de température, pour $x = E$, est resté à peu près insignifiant, jusqu'à l'époque actuelle où $a\sqrt{t}$ reçoit la valeur qui fait égale au résultat d'observation $\frac{1^\circ}{30^{\text{m}}}$ la dérivée $\frac{du}{dx}$ sous le sol, laquelle vaut hu', ou encore $\frac{u_0}{a\sqrt{\pi t}}$ [d'après la forme asymptotique $\frac{e^{-h^2a^2t}}{2ha\sqrt{t}}$ évidemment applicable depuis longtemps à $\psi(ha\sqrt{t})$ dans (10)]. Il résulte de là, en effet,

$$a\sqrt{t} = \frac{u_0 \times 30}{\sqrt{\pi}} = \frac{1600 \times 30}{\sqrt{\pi}} \qquad \text{et} \qquad \frac{E}{2a\sqrt{t}} = \frac{25}{24}\sqrt{\pi}.$$

Or la formule approchée (20) de $\psi(\omega)$ donne alors, en prenant $\frac{E}{2a\sqrt{t}} = \omega$,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\psi\left(\frac{E}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{e^{-\omega^2}}{\omega\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{2\omega^2}\right),$$

---

(1) La même démonstration fait voir qu'*aux grandes profondeurs* x le rapport $\frac{u}{u_0}$ est donné par la formule analogue et simple, où le coefficient h ne figure plus,

$$(25\ bis) \qquad \frac{u}{u_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

comme si la surface $x = 0$ se refroidissait *par contact* ou était maintenue sans cesse à la température zéro.

avec une erreur par défaut moindre que $\frac{e^{-\omega^2}}{\omega\sqrt{\pi}}\frac{3}{4\omega^4}$. Prenons donc

$$\omega^2 = \left(\frac{25}{24}\sqrt{\pi}\right)^2 = 3,40885, \qquad \omega\sqrt{\pi} = 3,2725;$$

et il viendra

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\psi\left(\frac{E}{2a\sqrt{t}}\right) = (0,010109)(1-0,147) = 0,00863,$$

avec une erreur par défaut moindre que $\frac{e^{-\omega^2}}{\omega\sqrt{\pi}}\frac{3}{4\omega^4} = 0,00065$.

Ainsi, notre intégrale approchée (11) donne sensiblement, au bas $x = E$ de la croûte, même à l'époque actuelle et, visiblement, sur une épaisseur finie, un refroidissement d'environ 9 millièmes seulement de la température primitive u_0, refroidissement insignifiant eu égard à l'approximation requise ici, qui n'excède certainement pas le $\frac{1}{100}$ des résultats [1].

IV. *Tentative pour apprécier, à partir d'une certaine époque, les progrès de la solidification à la base de la croûte.*

14. On voit toutefois qu'avec la valeur de E choisie, 100000^m, nos formules (8) et (11) de u et de v commencent, dès l'époque actuelle, à ne plus vérifier aussi bien que par le passé la condition, acceptée au début de cette étude, de conserver à la croûte considérée, reposant sur une masse plus centrale fondue ou à l'état pâteux, une épaisseur E invariable, et, par conséquent, de maintenir aussi sa base $x = E$ à la température même u_0 de fusion de cette masse

---

[1] Refaisons les calculs en prenant $u_0 = 1495^\circ$, conformément aux données plus récentes qu'indique la note [2] du n° 9 (p. 201). La valeur $\frac{25}{24}\sqrt{\pi}$ de $\frac{E}{2a\sqrt{t}}$ à l'époque actuelle, se trouvera multipliée par le rapport $\frac{1600}{1495} = 1,0702$; ce qui donnera

$$\omega = 1,08945\sqrt{\pi} = 1,9310, \qquad \omega^2 = 3,9045, \qquad \omega\sqrt{\pi} = 3,4226$$

et

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\psi\left(\frac{E}{2a\sqrt{t}}\right) = (0,005888)(1-0,128) = 0,00513,$$

avec une erreur par défaut moindre que 0,00029.

L'écart d'avec l'unité, au lieu d'être environ 0,009 comme pour $u_0 = 1600^\circ$, serait donc seulement 0,005.

inférieure. Or un tel maintien effectif de E et de u_0 exigerait dans celle-ci une activité chimique juste capable de lui restituer sans cesse la chaleur qu'elle cède à la croûte superposée. Si, au contraire, cette chaleur ascendante est fournie par la transformation purement physique des couches les plus hautes de la masse inférieure prêtes à se solidifier et abandonnant leur chaleur latente de fusion, la croûte aura évidemment une épaisseur E croissante par l'adjonction continuelle, à sa base $x = \mathrm{E}$, de nouvelles particules solides prises à la masse inférieure.

Mais alors le problème de Physique mathématique ainsi posé devient beaucoup plus complexe et se dérobe à nos méthodes de calcul familières. Il entre dans la classe de ceux où soit les *conditions définies* relatives à diverses parties de la surface des corps étudiés, soit même, ici, les *équations indéfinies* concernant leur intérieur, s'appliquent non pas toujours à la même matière, aux mêmes particules, mais à une matière continuellement accrue ou, du moins, changeante.

Il est pourtant, à ma connaissance, deux de ces problèmes, qui ont pu être abordés, savoir, celui de la *charge roulante*, ou du *poids voyageur* le long d'une barre horizontale à bouts appuyés, dont les deux parties séparées par le poids s'échangent sans cesse entre elles, et celui du choc central mutuel de deux sphères *élastiques*, dont la surface de contact varie durant tout le phénomène. Mais il a fallu, pour obtenir rationnellement des résultats, y négliger l'inertie soit de la barre, soit des parties en regard et sensiblement déformées des deux sphères, c'est-à-dire attribuer sans cesse à la barre ou à ces parties (en regard) des sphères leurs *figures respectives d'équilibre* pour la situation actuelle soit du poids voyageur, soit des centres des sphères; ce qui revient à *séparer complètement*, en les localisant dans des régions du système entièrement distinctes : d'une part, l'*énergie potentielle* ou de ressort, ainsi confinée dans la barre ou dans les parties presque contiguës des sphères; d'autre part, l'*énergie actuelle* ou demi-force vive, réduite à celle du poids voyageur ou de la majeure partie des sphères, qui garde inaltérées sa figure et son orientation. Or on sent combien de pareilles hypothèses dénaturent les questions [1].

---

[1] On peut voir, pour ces deux problèmes, les pages 560 à 577 et 716 à 719 de

15. Sous la réserve de restrictions analogues [1], il y aurait peut-être lieu simplement, ici, de faire, à partir d'une certaine époque t_0 (où nous poserons $E = E_0$), l'épaisseur E proportionnelle à $\sqrt{t}$ et, par suite, $\frac{dE}{dt}$ inverse de $\sqrt{t}$, en choisissant d'ailleurs E_0 et t_0 de manière que le petit flux ascendant de chaleur $K\frac{du}{dx}$ ou $C a^2 \frac{du}{dx}$, à travers le plan $x = E$ et par unité de temps, flux désormais en raison inverse du binome $\frac{E}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t}$ [2] ou, par suite, très sensiblement, de $\sqrt{t}$ (t_0 étant déjà très grand), soit égal à la chaleur latente $L\frac{dE}{dt}$ dégagée, toujours dans l'unité de temps,

---

mon Volume de 1885 intitulé « *Application des potentiels à l'équilibre et au mouvement des solides élastiques, avec des notes étendues sur divers points de Physique mathématique et d'Analyse* », volume constituant le Tome XIII (4e série) des *Mémoires de la Société des Sciences, de l'Agriculture et des Arts de Lille.* L'intégration de l'équation du problème de la charge roulante, ainsi simplifié, se trouve traitée aussi dans mon *Cours d'Analyse infinitésimale pour la Mécanique et la Physique* (t. II, second fascicule, p. 265*) : elle avait été abordée, en premier lieu, par Stokes.

[1] A la réflexion, cette réserve ne me paraît pas indispensable ici, en raison de ce que les phénomènes de chaleur dans les corps athermanes ont leur équation indéfinie aux dérivées partielles, qui est celle de la température, du premier ordre seulement par rapport au temps, ou ne semblent jamais manifester la complication particulière due, dans les déplacements perceptibles de la matière, à *l'inertie*, à l'influence des *vitesses acquises*, bref, à la présence, dans les équations, de dérivées secondes par rapport au temps, du moins toutes les fois que les changements s'effectuent à des vitesses notables. Or, ce sont précisément les termes *d'inertie* qui, dans les problèmes du poids voyageur le long d'une barre ou du choc des sphères élastiques, rendaient inintégrables les équations.

L'intervention incessante de points matériels nouveaux à considérer et, par conséquent, de leurs températures constituant sans cesse de nouvelles inconnues, n'a pas de quoi troubler le géomètre. Car rien n'empêche d'envisager dès le début, ou d'introduire dans le système matériel à étudier, tous ceux d'entre ces points qui auront à y figurer jusqu'à une phase assignée quelconque du phénomène : seulement, leurs températures ne commenceront à varier que successivement, à mesure que les atteindra le progrès de la solidification.

[2] Comme on le voit par la formule (33 *bis*) de la page 19 (t. II) de mon Cours sur la *Théorie analytique de la chaleur*, *etc.* Mais il suffira ici, pour avoir le flux $Ca^2\frac{du}{dx}$ de chaleur à la grande profondeur $x = E$, de différentier en x la formule précédente (25 *bis*) de u (p. 207); ce qui donnera, vu l'expression (9) de ψ,

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_0}{a\sqrt{\pi t}} e^{-\omega^2}.$$

par la couche élémentaire dE qui se solidifie sans cesse à la base de la croûte.

Alors, ω désignant la valeur, *désormais invariable*, du rapport $\frac{E}{2a\sqrt{t}}$, on aura

$$E = 2a\omega\sqrt{t}, \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{a\omega}{\sqrt{t}};$$

d'où il résulte, comme chaleur latente de fusion dégagée, $\frac{La\omega}{\sqrt{t}}$. On trouve, d'autre part, comme flux de chaleur ascendant, $C\frac{au_0}{\sqrt{\pi t}}e^{-\omega^2}$; et leur égalité donne finalement, pour déterminer ω, l'équation

$$(26) \qquad \frac{e^{-\omega^2}}{\omega\sqrt{\pi}} = \frac{L}{Cu_0},$$

dont le second membre est *le rapport de la chaleur latente* L *de fusion de la croûte à la chaleur totale* Cu_0 *absorbée par l'échauffement de celle-ci au moment où elle va fondre.*

Plus ce rapport est grand, et plus est petite l'unique racine ω de l'équation (26); car le premier membre croît de zéro à l'infini quand ω décroît de l'infini à zéro.

16. Le rapport $\frac{L}{Cu_0}$ devrait donc, d'après les données et les calculs de la fin du n° 13, être seulement 0,010109 (¹), pour que l'époque actuelle, où $\omega = \frac{25}{24}\sqrt{\pi}$ quand l'épaisseur E égale 100000^m, fût celle où E commencerait à croître comme $\sqrt{t}$. En réalité, ce rapport physique est, bien probablement, très supérieur à 0,01 environ. D'où il suit qu'il faudra, avant de commencer à faire varier E aussi vite que $\sqrt{t}$, attendre la période du refroidissement, plus avancée, où la fonction $\frac{e^{-\omega^2}}{\omega\sqrt{\pi}}$ aura atteint la vraie valeur du rapport en question $\frac{L}{Cu_0}$. Si celui-ci égale, par exemple, 0,10951, soit 0,11, valeur approximative (pour le fer) et qui correspond à

(¹) Ou même 0,005888 quand $u_0 = 1495°$ et non 1600° (Note de la fin du n° 13).

$\omega = 0{,}68\sqrt{\pi}$, on aura, à ce moment,

$$\frac{E}{2a\sqrt{t}} = 0{,}68\sqrt{\pi}, \quad \text{avec} \quad t = t_0, \quad E = E_0 = 100000^{m};$$

et t aura grandi, à partir de l'époque actuelle où $\frac{E}{2a\sqrt{t}} = \frac{25}{24}\sqrt{\pi}$, dans le rapport $\left(\frac{25}{24 \times 0{,}68}\right)^2 = 2{,}3466$ (¹). Jusque-là le flux ascendant de chaleur, à travers la base $x = E$ de la croûte, sera insuffisant, pour que l'épaisseur E croisse aussi vite que $\sqrt{t}$ (²).

Il faudrait donc attendre encore, pour que E commençât à croître d'une manière simple et définitive, autant de temps, avec plus d'un tiers en sus, que la durée totale du refroidissement jusqu'à l'époque actuelle. Il est clair, du reste, qu'à partir de ce moment $t = t_0$, la température v ou u, calculée par nos formules, cesserait, comme ω, de varier au bas $x = E$ de la croûte : résultat bien conforme à la loi physique de constance du point de fusion. Mais, malheureusement (du moins au point de vue, où nous nous sommes placé comme Fourier, d'une épaisseur E finie *dès l'origine* $t = 0$, avec température initiale u_0 *constante* sur toute l'épaisseur), si l'on évalue par l'expression asymptotique $\psi(\omega) = \frac{e^{-\omega^2}}{2\omega}$ le dernier terme de (25) au même moment t_0, on trouve 0,10951, avec erreur par excès moindre que $\frac{e^{-\omega^2}}{\omega\sqrt{\pi}}\frac{1}{2\omega^2} = 0{,}03769$, soit une valeur approchant de 0,1. C'est dire qu'à l'époque t_0 considérée, la température v au bas de la croûte, évaluée par nos formules, comportera une erreur, sur u_0, de l'ordre du dixième et beaucoup trop sensible pour qu'on puisse continuer à les admettre.

Il faudrait donc trouver une intégrale plus approchée, ou vérifiant mieux la condition $v = u_0$ relative au fond, que la nôtre (11), et n'exigeant cependant que des calculs abordables (³), pour avoir,

---

(¹) Ou même dans le rapport $2{,}3466 \times 1{,}0702^2 = 2{,}6878$, si l'on prend $u_0 = 1495^{\circ}$.

(²) On pourra essayer de négliger jusqu'à cette époque le progrès, assez limité sans doute, de la solidification.

(³) *Inconvénients de la solution de Fourier en série trigonométrique.* — Il y a bien la solution ordinaire et exacte en série trigonométrique, qui est, par exemple, dans le cas simple d'un refroidissement *par contact* à la surface $x = 0$

du problème de Fourier sur le refroidissement de la croûte terrestre, une solution appropriée à cet avenir encore lointain.

---

du sol,

$$u = u_0\left(\frac{x}{E} + \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i}e^{-\frac{i^2\pi^2a^2t}{E^2}}\sin\frac{i\pi x}{E}\right)$$

et qui a été donnée par Fourier [*Mémoire sur la théorie analytique de la chaleur*, inséré dans le Tome VIII (1829) des *Mémoires de l'Académie royale des Sciences de l'Institut de France* (p. 581 à 622, formule 1)]. Mais, pour les valeurs de $\pi a\sqrt{t}$ petites comparativement à E, sa convergence est d'une désespérante lenteur. La dérivée $\frac{du}{dx}$, particulièrement importante, y reçoit, en effet, si l'on pose

$$\frac{i\pi a\sqrt{t}}{E} = \alpha,$$

l'expression

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_0}{E}\left[1 + 2\sum_{i=1}^{i=\infty}e^{-\alpha^2}\cos\left(\frac{x}{a\sqrt{t}}\alpha\right)\right];$$

et celle-ci, en observant que $\frac{\pi a\sqrt{t}}{E}$ est l'accroissement uniforme $\Delta\alpha$ éprouvé par le rapport α entre deux termes consécutifs de la série, ou que, par suite,

$$\frac{1}{E} = \frac{\Delta\alpha}{\pi a\sqrt{t}},$$

devient

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_0}{\pi a\sqrt{t}}\left[\Delta\alpha + 2\sum_{\alpha=\Delta\alpha}^{\alpha=\infty}e^{-\alpha^2}\cos\left(\frac{x}{a\sqrt{t}}\alpha\right)\Delta\alpha\right].$$

Or, quand $\Delta\alpha$ se rapetisse, la série *se pulvérise* (pour ainsi dire) *à l'infini :* ce qui fait évanouir sa convergence, *entendue au sens ordinaire* ou en tant que permettant un calcul approché de la somme *limite* par l'addition des premiers termes, pris en nombre *restreint.* Car, ici, ces termes sont tous infiniment petits à la limite $E = \infty$, $\Delta\alpha = 0$, où ils constituent les éléments mêmes de l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2}\cos\left(\frac{x}{a\sqrt{t}}\alpha\right)d\alpha,$$

éléments se suivant par groupes en nombre indéfini alternativement positifs et négatifs, à sommes partielles sensibles, qui décroissent, d'un groupe à l'autre, jusqu'à la limite finale zéro.

Mais c'est justement alors que, *grâce à la continuité de variation acquise par la succession des termes de la série*, leur somme totale est évaluable et admet,

17. A défaut d'un emploi effectif de nos intégrales approchées *asymptotiques* (8), (25), (25 *bis*) du problème de refroidissement dans le calcul des épaisseurs E croissantes, calcul rendu ainsi impossible par les trop fortes valeurs *physiques* du rapport $\frac{L}{Cu_0}$, ou par les valeurs ω_0 trop petites de la racine ω correspondante de l'équation (26), faisons-en, du moins, une application théorique, en imaginant une croûte à très faible chaleur latente L de fusion, pour laquelle cette racine ω_0 excéderait 2 ou 3 et laisserait dès lors à nos formules, même pour $x = E$ et durant un long avenir, une approximation suffisante.

Supposons d'ailleurs pour un instant que, grâce à des actions chimiques appropriées, mais temporaires, dans la masse fondue sous-jacente qui supporte la croûte, l'épaisseur donnée E de celle-ci se maintienne constante jusqu'à un certain moment, où nous admettrons que le quotient jusqu'alors décroissant $\frac{E}{2a\sqrt{t}} = \omega$ ait une valeur $\omega_0(1+\varepsilon)$ voisine de ω_0, c'est-à-dire excédant celle-ci dans un très petit rapport ε (positif ou négatif). Continuons à poser, après ce moment où est épuisée l'action chimique,

$$\frac{E}{2a\sqrt{t}} = \omega_0(1+\varepsilon), \quad \text{ou} \quad E = 2a\omega_0\sqrt{t}(1+\varepsilon),$$

en faisant désormais ε *fonction de* t. Nous aurons, pour déterminer la suite de ses valeurs, l'égalité continue de la chaleur latente sans cesse émise,

$$L\frac{dE}{dt} \quad \text{ou} \quad L\left[2a\omega_0\sqrt{t}\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{a\omega_0}{\sqrt{t}}(1+\varepsilon)\right],$$

au flux de chaleur ascendant

$$C\frac{au_0}{\sqrt{\pi t}}e^{-\omega_0^2(1+\varepsilon)^2} = C\frac{au_0}{\sqrt{\pi t}}e^{-\omega_0^2}(1-2\omega_0^2\varepsilon).$$

---

comme on sait, la forme finie $\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$. Il vient donc bien

$$\frac{du}{dx} = \frac{u_0}{a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}},$$

conformément à ce que donne, dans l'hypothèse de E infini, la formule (25 *bis*) ci-dessus (p. 207).

D'où il résulte, en divisant par $2La\omega_0\sqrt{t}$, et vu que ω_0 est la racine de (26), l'équation différentielle

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \left(\omega_0^2 + \frac{1}{2}\right)\frac{\varepsilon}{t} = 0.$$

Son intégrale est

$$\varepsilon t^{\omega_0^2 + \frac{1}{2}} = \text{const.}$$

L'écart relatif ε *existant entre* ω *et* ω_0 *tend donc rapidement vers zéro*, comme l'inverse de la puissance $\omega_0^2 + \frac{1}{2}$ du temps t; et notre solution $\omega = \omega_0$ du problème de la variation de E ne constitue elle aussi, comme toutes nos intégrales (8), etc., qu'une solution asymptotique.

Quand l'écart relatif ε de ω d'avec ω_0 est *initialement* trop grand pour qu'on puisse négliger ses puissances supérieures à la première, l'équation différentielle en ε, sans être linéaire, comporte encore la séparation des variables, et elle donne comme intégrale

$$\log\sqrt{t} + \int \frac{d\log(1+\varepsilon)}{1 - e^{-\omega_0^2(2\varepsilon+\varepsilon^2) - \log(1+\varepsilon)}} = \text{const.}$$

Les valeurs successives de ε se calculent donc par une quadrature.

18. Si aucune action chimique préalable n'est en jeu, la rapide tendance de ω vers ω_0 fonctionnera dès le début du refroidissement; et l'on devra, ce semble, pouvoir y prendre, avec une certaine approximation,

$$(\alpha) \qquad \omega = \omega_0 \qquad \text{ou} \qquad E = 2a\omega_0\sqrt{t},$$

quelque petit que soit le temps t.

Il importe seulement, dans ce cas, d'observer que la constante u_0 entrant dans les formules (8), (10), (11), (25), (25 *bis*), etc., n'exprime plus une température initiale *inexistante* ici, puisque, pour $t = 0$, la croûte est sans épaisseur. C'est maintenant la température pour $x = E$ ou au bas de la croûte, température que nous pouvons appeler u_1, qui est la *température de fusion*. On a donc, d'après (25),

$$\frac{u_1}{u_0} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\psi(\omega_0);$$

d'où résulte, pour éliminer la constante u_0 en l'exprimant au moyen de la température u_1 de fusion, la formule

$$u_0 = \frac{u_1}{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \psi(\omega_0)}.$$

Éliminons en même temps, par (α), $a\sqrt{t}$ de l'expression asymptotique $\frac{u_0}{a\sqrt{\pi t}}$ de la dérivée $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$ relative à la surface $x = 0$; et il viendra, entre u_1, E et cette dérivée, la relation curieuse

$$(\beta) \qquad \frac{E}{2u_1}\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{\omega_0}{\sqrt{\pi} - 2\psi(\omega_0)}.$$

V. *Résolution des difficultés par l'hypothèse simple et naturelle d'une épaisseur nulle de la croûte, au début du refroidissement.*

19. Au moment de clore ce Mémoire, il me vient à l'esprit que l'analyse ébauchée dans le numéro précédent se présente comme applicable, avec ses formules (α) et (β), quelle que soit la valeur effective de ω_0, ou quelque grands que soient les rapports physiques $\frac{L}{Cu_0}$, $\frac{L}{Cu_1}$. Donc, pour lever les difficultés qu'a soulevées ici le problème du refroidissement de la croûte terrestre, censée portée encore par le bain métallique en fusion d'où elle est issue, il suffira d'abandonner l'hypothèse d'une épaisseur E *finie* (*ou sensible*) *dès le début*, hypothèse d'ailleurs en contradiction avec la loi de continuité du phénomène. C'est la formule (α), $E = 2a\omega_0\sqrt{t}$, où l'on pourra prendre voisine de $0{,}68\sqrt{\pi}$ la constante ω_0 si le bain en fusion est du fer, qu'il conviendra d'adopter pour régler les épaisseurs E successives; et nos intégrales asymptotiques (8), etc., résoudront la question avec toute la simplicité et l'exactitude désirables (surtout en y faisant h infini ou supposant refroidie par contact la face $x = 0$), du moins dans la mesure où le fragment considéré de la croûte sera assimilable à un *plateau* isotrope homogène.

A l'époque actuelle où $\left(\frac{du}{dx}\right)_0 = \frac{1}{30}$, la formule ($\beta$), si l'on y

pose $\omega_0 = 0,68\sqrt{\pi} = 1,20527$ et $u_1 = 1495^\circ$, donnera, en y calculant $\psi(1,20527) = 0,078263$ par la Table de Krampf,

$$E = (60\,u_1)\frac{1,20527}{\sqrt{\pi} - 0,15653} = (60\,u_1)(0,74588) = 66905^m.$$

Ce résultat ne changera rien d'essentiel aux conclusions générales du Mémoire, quoique la formule (α) rende la dérivée $\frac{du}{dx}$, au fond de la croûte, sensiblement plus grande que nous ne l'avions supposée et, par suite, l'épaisseur E actuelle notablement moindre, dans le rapport de 100 à 67 environ.

Depuis la précipitation des eaux sur la croûte terrestre et leurs déplacements successifs à sa surface, jusqu'à l'époque présente, les changements de E et de u_{em} ont dû être, ce semble, assez lents, pour permettre d'attribuer sans cesse la forme approximative (4), du moins quant à l'ordre de grandeur et dans les régions qui nous sont accessibles, à la partie u_m, *climatérique* en quelque sorte, des températures intérieures v, nonobstant les notables variations séculaires des limites de la partie émergée du sol, ainsi que de l'épaisseur E de la croûte. Grâce à cela, les intéressantes conclusions du n° 10 (p. 203) subsisteront sensiblement, malgré la substitution, au dénominateur 100000, du dénominateur moindre 67000 environ.

Ne manquons pas d'observer que l'appauvrissement actuel du rôle de u_0, restée une simple constante auxiliaire après avoir représenté à la fois la température *initiale* et celle *de fusion*, conduit à éliminer u_0 de l'équation caractéristique (26), pour lui substituer la constante u_1 à laquelle est maintenant dévolu ce dernier rôle. L'équation (26) devient alors

$$(\gamma) \qquad \frac{e^{-\omega^2}}{\omega\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\psi(\omega)\right]^{-1} = \frac{L}{Cu_1},$$

avec premier membre croissant encore de zéro à l'infini quand ω décroît de l'infini à zéro.

Si l'on y fait $\omega = 0,68\sqrt{\pi} = 1,20527$, il vient ainsi $\frac{L}{Cu_1} = 0,12012$. Or les expériences les plus récentes indiquent, pour le rapport de la chaleur latente L de fusion du fer à la chaleur totale (sensiblement Cu_1) qu'absorbe ce métal depuis la température de la

glace fondante jusqu'au moment où il va fondre, la valeur 0,125, dont l'excédent sur la fraction précédente (0,120 environ) atteint à peine 4 pour 100.

20. La formule (α) des épaisseurs E étant censée donnée, les deux premières relations (5), complétées par la condition $u = u_1$ relative à la limite $x = \mathrm{E}$, déterminent entièrement le problème, qui ne comporte ainsi que la solution obtenue (8). On le démontre sans difficulté, *malgré la variabilité de* E, par la méthode ordinairement suivie pour prouver l'unicité de la solution des problèmes usuels de refroidissement. Et l'on pourrait en dire autant pour toute autre loi bien définie de la forme $\mathrm{E} = f(t)$, donnant aussi $f(0) = 0$, et pour des valeurs de u_1 variables en fonction connue de t.

Soit, en effet, u une solution du problème ainsi posé. S'il en existait une seconde, $u + u'$, les équations en u' seraient évidemment

$$(\text{de } x = 0 \text{ à } x = \mathrm{E})\ \frac{1}{a^2}\frac{du'}{dt} = \frac{d^2u'}{dt^2},$$

$$(\text{pour } x = 0)\ \frac{du'}{dx} = hu', \qquad (\text{pour } x = \mathrm{E})\ u' = 0.$$

Or la première, multipliée par $u'dx$, puis intégrée de zéro à E, donne, vu les deux autres,

$$\frac{d}{dt}\int_0^{\mathrm{E}} \frac{u'^2}{2a^2}\,dx = -h(u'^2)_0 - \int_0^{\mathrm{E}} \left(\frac{du'}{dx}\right)^2 dx,$$

relation à second membre essentiellement négatif, quand il n'est pas nul. Donc l'intégrale définie, *essentiellement positive* ou nulle, figurant au premier membre, ne peut pas croître avec t et, s'annulant, *comme son champ* E, au début $t = 0$, elle ne peut que rester nulle. On a ainsi, sans cesse et partout, $u' = 0$; ce qui démontre bien l'unicité de la solution u.

21. Mais la formule (α), elle-même, constitue-t-elle la seule manière possible d'exprimer l'égalité continue du flux calorifique ascendant qui traverse la base de la croûte, à la chaleur latente dégagée sans cesse par la nouvelle couche en train de se solidifier *et toujours à la même température?* Il serait peut-être difficile de le démontrer.

A la vérité, toute fonction continue φ de x et de t qui satisfera aux deux premières relations (5) en u et existera, à partir de $x = 0$ et $t = 0$, dans un champ assez grand de valeurs positives de ces variables, pourra généralement, si l'on utilise ses diverses valeurs pour x compris entre zéro et une limite E fonction de t, constituer une intégrale u applicable à une croûte dont l'épaisseur E, variable, serait à tout instant cette limite même et se déterminerait précisément par notre condition

$$L\frac{dE}{dt} = K\frac{du}{dx} = Ca^2\frac{d\varphi(E, t)}{dE}.$$

Car celle-ci, devenue l'équation différentielle du premier ordre

$$(\delta) \qquad \frac{dE}{dt} = \frac{Ca^2}{L}\frac{d\varphi(E, t)}{dE},$$

admet, en général, une intégrale déterminée, à partir de la valeur initiale zéro de E, censée correspondre à $t = 0$.

Mais la température $\varphi(E, t)$ n'y recevra que *très exceptionnellement* les valeurs assignées u_1. Si, par exemple, u ou φ doit y rester, comme ici, la température constante de fusion, la différentielle totale de $\varphi(E, t)$ sera nulle; et l'on aura

$$\frac{d\varphi(E, t)}{dE}\frac{dE}{dt} + \frac{d\varphi(E, t)}{dt} = 0,$$

ou, vu (δ) et en remplaçant $\frac{d\varphi}{dt}$ par la valeur $a^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ tirée de l'équation indéfinie,

$$(\varepsilon) \qquad (\text{pour } x = E)\ \frac{C}{L}\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0.$$

La fonction φ devra, par conséquent, vérifier à toute époque cette condition (ε), que l'on reconnaît aisément être bien satisfaite, à raison de l'équation (26) en ω (p. 211), par la formule (25 *bis*) donnant ici u ou φ (p. 207).

22. Il y a un cas extrême où notre point de vue actuel, dans lequel E débute par la valeur zéro et croît, dès l'abord, comme la racine carrée du temps t, se confond avec le point de vue précédent, plus proche de celui de Fourier, où l'on se représentait un

refroidissement ayant progressé très vite en profondeur ou ayant constitué, presque instantanément, la croûte sous son épaisseur actuelle, de manière à y rendre possible, dès une époque infiniment voisine de $t = 0$, l'application de la théorie ordinaire du refroidissement des solides. Ce cas de *transition* est celui d'une croûte à chaleur latente L infiniment petite, ou pour laquelle l'équation en ω_0 donnerait $\psi(\omega_0) = 0$, $\omega_0 = \infty$. Car, alors, dès que t n'est plus nul, la formule (α) rend l'épaisseur E infinie; d'autre part, les deux constantes u_0, u_1 y sont égales et nos intégrales asymptotiques, (8), (11), etc., surtout (25 *bis*), deviennent rigoureuses.

Comme on passe du premier point de vue au second en astreignant la base *seule* $x = \mathrm{E}$ de la croûte, d'ailleurs devenue mobile, à avoir sans cesse la température u_1 de fusion, tandis que le premier point de vue exigeait cette température, que nous y appelions u_0, à la fois comme température *initiale* sur toute la profondeur et *permanente* au fond $x = \mathrm{E}$, on conçoit que le second point de vue, seul, *moins chargé de conditions que le premier*, ait pu être réalisé *exactement*, grâce au mode (α) de variation de E, par la même intégrale asymptotique, la même fonction de x et de t, qui convient au cas limite, mais employée dans un domaine ou champ E de variation croissant avec t. Et l'on conçoit aussi que le premier point de vue ait pu être réalisé *approximativement* par la même intégrale asymptotique, à partir d'une épaisseur initiale sensible E_0, laissée constante jusqu'à la phase t_0 du refroidissement, mais à la condition expresse d'une chaleur latente L de fusion assez faible, ou d'une racine ω_0 assez grande, pour que le rapport des deux constantes u_0, u_1 reste très voisin de l'unité. Car c'est justement *l'écart relatif* de ces deux constantes, *dont le rôle s'échange*, qui exprime la différence des deux points de vue : aussi leur conciliation *approchée* exige-t-elle que cet écart soit insensible, ou que $\psi(\omega_0)$ reste une fraction négligeable de $\psi(0)$.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BRUNSCHVICG (LÉON). — LES ÉTAPES DE LA PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE. (*Bibliothèque de philosophie contemporaine.*) 1 vol. in-8, XI-591 pages. Paris, Félix Alcan, 1912.

1. L'important Ouvrage de M. Brunschvicg est paru depuis près de trois années. Non seulement il a été lu avec le plus grand intérêt par les mathématiciens et les philosophes et par tous ceux qui tiennent à ne pas rester tout à fait étrangers à l'évolution de la pensée humaine, mais il a déjà provoqué des réflexions nombreuses, des discussions (comme celle de MM. Borel et Hadamard sur l'infini) qui, en amenant quelques-uns des créateurs de la science moderne à exposer leurs idées sur certains points insuffisamment précisés des principes de cette science et à en approfondir le sens et la portée, quelquefois même à faire évoluer leurs propres pensées, contribuent puissamment au progrès incessant de la Philosophie et donnent aux diverses disciplines scientifiques la meilleure orientation possible. Le temps n'est plus où philosophes et savants formaient deux groupes distincts. Des philosophes consciencieux n'ont pas hésité à s'assimiler les méthodes de la Science (si grand que soit l'effort nécessaire pour atteindre ce but), et d'autre part les mathématiciens ayant voulu asseoir leur science sur des principes solides et s'étant, depuis un demi-siècle surtout, demandé quelle était la portée exacte de leurs spéculations, se sont tout naturellement trouvés entraînés vers la Philosophie. De plus, l'orientation donnée aux Mathématiques modernes par l'introduction du concept de classe et de la théorie des ensembles, qui font reposer la théorie des fonctions sur une notion qui n'est plus celle du nombre entier et qui ont donné à la science mathématique tout entière une nouvelle forme, ont tellement rapproché cette science de la logique que tout une école prétend la réduire à la seule logique et la constituer de toutes pièces sans faire appel à aucun autre principe. On est même allé si loin que certains mathématiciens et non des moindres (H. Poin-

caré, par exemple) ont crié « hola ! » Certes, bien des idées se sont trouvé précisées, mais n'est-on pas allé trop loin, ne s'est-on pas aventuré sur un terrain bien peu stable, sur quelques sables mouvants menaçant de tout engloutir, et là où le sol est solide, la Logistique a-t-elle joué véritablement un rôle ? Poincaré écrivait en 1909 : « En ce qui concerne la fécondité, il semble que M. Couturat se fasse de naïves illusions. » La Logistique, d'après lui, prête à l'invention « des échasses et des ailes » et, à la page suivante : « Il y a dix ans que M. Peano a publié la première édition de son Formulaire. »

« Comment, voilà dix ans que vous avez des ailes et vous n'avez pas encore volé ! »

« J'ai, écrit Henri Poincaré, la plus grande estime pour M. Peano, qui a fait de très jolies choses (par exemple, sa courbe qui remplit tout une aire), mais enfin, il n'est allé ni plus loin, ni plus haut, ni plus vite que la plupart des mathématiciens aptères et il aurait pu faire tout aussi bien avec ses jambes, je ne vois au contraire dans la Logistique que des entraves pour l'inventeur ; elle ne nous fait pas gagner en concision, loin de là, et s'il faut 27 équations pour établir que 1 est un nombre, combien en faudra-t-il pour démontrer un vrai théorème [1]. »

En avons-nous assez dit pour bien montrer que la Mathématique se trouve à un tournant de son histoire, à un instant où la direction qu'elle va prendre n'est pas bien fixée, la Logistique, à elle seule ne pouvant « justifier la Mathématique en tant que maîtresse de vérité ? » Ce n'est pas la première fois que le cours de la Science se trouve engagé dans un tel tourbillon de courants contraires. En remontant le cours de l'histoire de la Philosophie mathématique, on peut avoir l'espoir de donner à la critique philosophique de nouvelles bases.

A quoi bon se jeter dans le tourbillon et finir par élaborer un nouveau système participant plus ou moins de ceux déjà établis ? Mieux vaut, pense M. Brunschvicg, rester sur la berge, examiner les conditions dans lesquelles s'est formé ce tourbillon et pour cela remonter le courant de la science mathématique jusqu'à sa source.

---

[1] *Science et méthode*, p. 192.

L'idée est des plus belles, mais pour la réaliser, pour mener à bien une telle œuvre, il faut connaître les principales théories mathématiques, en avoir approfondi les principes, ce qui représente, dans l'état actuel de la Science, un travail considérable, de plus, il faut se livrer à de sérieuses recherches historiques. Ces dernières, il est vrai, comme le fait remarquer l'Auteur, sont singulièrement facilitées par les travaux de M. Moritz Cantor et de M. Zeuthen où l'histoire « s'offre déjà élaborée à la réflexion du philosophe » et par d'autres publications presque toutes récentes. Malgré cela, la tâche que s'est proposée l'Auteur est considérable. Que ceux qui critiqueraient trop aisément certains points de cet Ouvrage veuillent bien y songer! Elle était de nature à faire reculer plus d'un savant. On sait aujourd'hui quelle sympathie cet Ouvrage a trouvée auprès du monde qui pense. L'Auteur a su associer le génie du philosophe au génie du savant; son œuvre restera une des plus belles applications de la méthode historique. Si l'on songe à l'influence considérable qu'a eue de tout temps la Mathématique sur la Philosophie tout entière, on comprendra la portée considérable de cette étude qui, au delà de l'évolution de la Philosophie mathématique elle-même, atteint le mouvement de la pensée humaine.

2. L'Ouvrage n'est pas de ceux qu'on analyse et critique en quelques pages. Tout au plus pourrions-nous nous proposer de montrer tout l'intérêt qu'en présente la lecture. Mais sa renommée a depuis longtemps gagné tous les milieux scientifiques; il a déjà provoqué d'assez nombreuses publications; le temps en a déjà consacré la grande valeur. Aussi, nous bornerons-nous à en donner très rapidement un résumé en insistant sur les points les plus intéressants, soit par leur portée, soit par l'originalité qu'ils révèlent. Il est bien évident que les notions les plus élémentaires comme celle du *nombre*, les concepts les plus généraux comme celui de l'*infini* seront matière à d'interminables discussions et que jamais rien de définitif ne sera écrit à leur sujet. A l'heure où le concept *infini* paraissait être à peu près précisé, celui de *transfini* vient s'introduire sans que les idées que s'en font les divers mathématiciens soient toutes identiques, de telle façon qu'on en vienne à se demander quel est son sens exact et

que des savants parfaitement documentés comme M. Borel, à la fois philosophe subtil et mathématicien éminent, en viennent à demander si le mot *transfiniment* a un sens aussi précis que le mot *infiniment*. Il serait puéril de croire qu'on peut résoudre d'une manière définitive les questions relatives aux fondements de la Science et à la certitude de ses conclusions. Tout au plus est-il possible de découvrir quelques éléments de ces solutions et surtout, c'est là le point capital, de relier les unes aux autres les diverses disciplines afin de faire profiter chacune d'elles des conquêtes faites par l'intelligence dans le domaine des autres et de réaliser l'unité de la pensée humaine.

3. M. Brunschvicg s'est d'abord heurté à la première des difficultés qu'on rencontre dans l'application de la méthode historique. Pour remonter jusqu'aux sources où s'est alimentée la Science à sa naissance, il faut remonter à la préhistoire. L'histoire ne commence guère [1] qu'à Pythagore, plus précisément au pythagorisme, car si l'on connaît assez bien l'ensemble de la doctrine pythagoricienne telle que l'ont créée le maître et ses disciples, il est assez mal aisé de savoir ce qui est dû à chacun de ces premiers savants grecs. Les Mathématiques étaient déjà relativement très développées. Il faudrait savoir ce que la Grèce a emprunté à l'Égypte et aux Asiatiques, aux Chaldéens surtout qui, bien des siècles avant que la civilisation grecque ne fût née, étaient déjà des savants, des astronomes remarquables comme ce Kidinnu qui avait déterminé le mois lunaire et construit des éphémérides de la Lune avec une précision qui est des plus surprenantes pour l'époque. La longueur du mois synodique lunaire trouvée par cet ancêtre des astronomes avec les instruments les plus rudimentaires est $29^j\,12^h\,44^m\,3^s,3$ ne différant que de $\frac{1}{10}$ de seconde de la valeur $29^j\,12^h\,44^m\,2^s,9$ adoptée actuellement dans les calculs astronomiques. Les calculs de Kidinnu exigeaient une connaissance déjà approfondie de l'Arithmétique. Les Chaldéens ignoraient tout de la Géométrie; ils ne semblent pas l'avoir soupçonnée.

---

[1] Il s'agit ici de l'époque à partir de laquelle on pourra suivre d'une façon continue l'évolution des Mathématiques et de la Philosophie. Les Chaldéens nous ont transmis ainsi que les Égyptiens quelques documents très anciens, mais tout à fait isolés.

Après les expéditions d'Alexandre, cette science chaldéenne toute faite d'observations et de résultats pratiques put fusionner avec la science entièrement différente et toute spéculative de l'Hellade. — Mais comment cette fusion s'est-elle produite? — Nous ne le saurons jamais et l'on voit combien il est regrettable que nous ne sachions rien de plus sur les connaissances des Babyloniens, des Égyptiens et sur leur influence sur la science grecque.

En résumé, l'histoire ne s'ouvre que très loin de la source ou des sources de la science mathématique. Le fleuve dont l'Auteur aurait voulu remonter le cours n'est pas à sa naissance; ce n'est même plus un ruisseau; c'est déjà une rivière qui a reçu des affluents d'un débit considérable. — Comment donc découvrir dans quelles conditions est née la notion qui semble primordiale, celle du nombre? — M. Brunschvicg est bien obligé d'employer le procédé habituel qui consiste à remplacer les données de la préhistoire par celle de l'ethnographie. Il suivra le développement de la pensée mathématique chez des peuples plus ou moins primitifs. C'est la seule manière de remédier à l'impossibilité dans laquelle nous nous trouvons de ne pouvoir suivre la culture hellénique dès ses débuts, et de savoir ce que la philosophie pythagoricienne a ajouté aux doctrines, aux connaissances de toutes sortes venues de l'Asie ou d'ailleurs. Ne pouvant suivre la constitution de l'Arithmétique chez les Grecs, dans l'ère primitive de nos civilisations, on observe directement cette constitution dans les sociétés inférieures. Il y a là, dans cette substitution des observations ethnographiques à l'inconnu de la préhistoire, une hypothèse invérifiable et qui fait qu'au fond on doit avouer qu'on ne sait rien (absolument rien), de la façon dont est née l'Arithmétique et le mystère le plus impénétrable plane toujours sur la genèse de la notion du nombre.

4. Cette réserve faite, l'investigation ethnographique fournit toutefois des observations intéressantes pour le philosophe. Sur l'usage du calcul, plusieurs travaux étaient déjà parus quand récemment l'Ouvrage de M. Lévy-Bruhl sur *Les Fonctions mentales dans les Sociétés inférieures* (1910) lui a consacré un long Chapitre très documenté et rempli de précieuses observations. M. Brunschvicg a trouvé là la description des principaux procédés de calcul des

peuplades primitives. On y voit que, pour compter, le primitif utilise ce qui fait image : ses membres, ses doigts. Tout cela est certes intéressant, mais combien grande est la lacune qui existe entre l'état du calcul chez ces sauvages et celui de l'Arithmétique au début de l'histoire ! « Si haut que nous permettent de remonter les documents d'origine babylonienne ou égyptienne, qui ont été découverts de nos jours, ils nous placent dans un milieu de pleine culture, dans une ère de véritable science ». C'est là, voyons-nous, le défaut capital que présente dans cette étude de la Philosophie mathématique l'emploi de la méthode historique. C'est une histoire réduite à la période contemporaine... quelque chose de comparable à une histoire de l'Europe qui ne commencerait qu'après le Moyen-Age. Le papyrus Rhind nous montre que les Égyptiens traitaient des problèmes ardus sur les fractions. En somme l'histoire ne permet de traiter comme premier problème que l'influence de l'Arithmétique, d'une science des nombres déjà très avancée sur l'explication de l'Univers dans la philosophie pythagoricienne. Après cela, nous verrons évoluer la science mathématique et naître ses diverses disciplines. Le seul fait que les nombres occupaient, dans la première philosophie historiquement connue, une importance capitale ; qu'ils condensaient dans leurs symboles tous les secrets de l'Univers, montre combien nous restons loin des sources de la science mathématique. C'est là un défaut de la méthode et il restreint considérablement l'importance de l'Ouvrage que nous analysons. Ce dernier n'en reste pas moins des plus intéressants, mais redisons-le : c'est quelque chose comme une philosophie de l'histoire qui ne pourrait traiter que des Temps Modernes, les époques antérieures lui étant totalement inconnues.

Lorsqu'on veut retrouver la genèse d'une notion primordiale, on étudie quelquefois le développement de cette notion, sa naissance et le début de son évolution chez l'enfant. C'est une méthode courante en Psychologie. Malheureusement, elle ne saurait s'appliquer à la notion de nombre, car, dans les nations civilisées, on apprend aux enfants les noms de nombres avant de leur faire distinguer les valeurs numériques — « la numération précède le calcul ». Et M. Brunschvicg le signale (p. 7), ayant vraisemblablement cherché à combler, par la méthode que nous indiquons,

la lacune que laisse l'histoire à son début. — Il faut donc se résigner à partir d'une science déjà toute faite, déjà à l'âge adulte et à suivre son développement sans rien savoir de sa naissance et de sa jeunesse.

5. Une constellation a deux caractéristiques : sa forme géométrique et le nombre de ses étoiles (visibles à l'œil nu). De même, toutes les choses connues ont, comme les constellations, un nombre qui leur est propre — « toutes les choses connues ont un nombre, puisque le nombre est la condition même de leur connaissance ». Telle est la base de la philosophie pythagoricienne — ce sera aussi, à peu de chose près, la base de la philosophie platonicienne, les premiers systèmes philosophiques : pythagorisme et platonisme, étant du type mathématique. L'arithmétique pythagoricienne est donc avant tout une théorie des nombres. On détermine les propriétés particulières de chacun de ces nombres qui sont des réalités naturelles, on en étudie les rapports et de là jaillit la merveilleuse harmonie de l'Univers. Les *moyens arithmétique*, *géométrique*, *harmonique* ont une importance capitale. La merveilleuse correspondance entre les nombres et les sons (accord parfait et rapport harmonique) révèle l'accord de l'harmonie arithmétique et de l'harmonie musicale. Le cube, solide parfaitement harmonieux ayant 12 arêtes, 8 sommets, 6 faces : ces harmonies sont aussi en accord avec l'harmonie géométrique (6, 8 et 12 étant en rapport harmonique et respectivement proportionnels aux longueurs des cordes rendant une note, la quarte et l'octave). La généralisation de tels rapports conduisit les Pythagoriciens à l'harmonie des sphères célestes, et à l'harmonie universelle basée sur la théorie des nombres. Platon va encore plus loin dans cette voie, et l'Arithmétique et la Géométrie lui fournissant un modèle de démonstration et un procédé fécond de découverte, sa philosophie est mathématique en un double sens du mot : il tire la Philosophie de la Mathématique, dit M. Brunschvicg, et il fonde la Mathématique sur une Philosophie.

Avec Aristote naît la logique formelle et le rôle de la Mathématique dans la Philosophie se trouve réduit ; les nombres sont ramenés à leur usage proprement arithmétique, ils n'auront plus

jamais l'importance capitale que leur attribuaient les premiers systèmes grecs.

Un Chapitre est consacré aux *Éléments d'Euclide* qui montrent bien l'universalité d'application de la méthode aristotélicienne. M. Brunschvicg s'efforce de dégager la partie philosophique de ces *Éléments* qui devaient rester pendant des siècles nombreux le monument le plus important des sciences exactes, jusqu'à Fermat et Descartes, jusqu'à la merveilleuse et féconde invention de la Géométrie analytique, pont audacieusement jeté entre la science des nombres et la Géométrie. « Si l'on fait cette hypothèse que Descartes n'a pas écrit la *Géométrie*, on peut conjecturer que selon toute vraisemblance l'évolution de la Mathématique n'aurait pas été profondément modifiée ; mais il est difficile de croire que le développement de la Philosophie du XVIIe siècle n'en eût pas été affecté, qu'en particulier les doctrines de Malebranche et de Spinoza eussent présenté la rigueur systématique que nous y retrouverons. C'est que la *Géométrie* est l'œuvre d'un *méthodique* qui procède d'une conception universelle de la Science et qui lègue à ses successeurs une notion originale de la vérité scientifique » écrit M. Brunschvicg. Il suffit en effet d'ouvrir l'*Éthique* de Spinoza, de jeter les yeux sur cette longue suite de théorèmes, démonstrations, corollaires, scholies, lemmes, etc., pour y retrouver l'aspect d'un Livre de Géométrie élémentaire. Donc qu'on prouve que Fermat, l'auteur de l'*Isagoge ad locos planos et solidos*, est le véritable inventeur des coordonnées et de la Géométrie analytique, la gloire de Descartes n'en sera que fort peu ternie. Et l'Auteur s'efforce de montrer la portée de la Géométrie cartésienne, l'influence qu'elle a eue sur son système philosophique et la place qu'elle tient dans l'œuvre de Descartes et dans le cartésianisme, ainsi que dans les philosophies qui devraient, en quelque sorte, en être issues : celle de Malebranche et celle de Spinoza où le cartésianisme aboutit à une liaison étroite de la Mathématique et de la Théologie.

6. A l'Analyse infinitésimale dont la découverte, préparée par l'invention de la Géométrie analytique, par quelques quadratures faites par Archimède, et plus récemment par Viète, Képler, Cavalieri, devrait faire la gloire de Leibniz et de Newton (qui semblent

l'avoir faite séparément), M. Brunschvicg consacre tout un Livre, tout en laissant de côté les discussions relatives à son invention [1]. Une telle découverte devait révolutionner non seulement les Mathématiques qui voyaient s'ouvrir un immense champ de recherches, mais la Philosophie tout entière. M. Brunschvicg étudie avec le plus grand soin la formation de la philosophie leibnizienne. Celle-ci présente, pour l'objet qu'il s'est proposé, un intérêt capital. En effet, après le pythagorisme et le platonisme, le leibnizianisme est une philosophie à peu près complètement mathématique. Le parallélisme de la Mathématique et de la Métaphysique est absolu dans les œuvres de Leibniz. Et cependant « pas plus qu'aux doctrines antérieures, il n'est arrivé à la philosophie mathématique de Leibniz d'imposer sa vérité aux générations qui suivirent; bien plus, il semble qu'elle n'ait pas réussi à se définir elle-même et à se fixer dans sa vérité intrinsèque ». Rechercher les raisons de cet échec, dans quelle mesure il est lié aux bases scientifiques de la doctrine, tel est le but atteint par l'auteur dans un des plus beaux Livres de son Ouvrage; nous ne pouvons malheureusement en donner une analyse en quelques lignes.

7. La période moderne devait voir naître deux philosophies : le *kantisme* et le *positivisme*, d'un caractère tout différent des systèmes philosophiques précédents. La Mathématique y joue encore un rôle considérable; mais, comme le dit M. Brunschvicg, tandis que le pythagorisme, le platonisme, le cartésianisme et, d'une façon générale, tous les systèmes philosophiques anciens cherchaient le centre de gravité de la Science dans les parties proprement abstraites et intellectuelles, Kant et Comte le trouveront dans les applications de cette science à la Nature. Pourquoi? C'est, pense l'Auteur, parce que le XVIIIe siècle qui a vu éclore les grandes découvertes scientifiques, qui fut le siècle de Lagrange, d'Alembert..., celui des grandes découvertes astronomiques, n'a eu qu'à développer le Calcul infinitésimal, à appliquer les mé-

---

[1] Leibniz a publié le premier sa découverte; Newton ne l'avait signalée à des amis que sous forme de rébus tout à fait indéchiffrables. On lira avec plaisir sur ce sujet les Chapitres de l'*Histoire des Sciences*, par Maximilien Marie.

thodes de Newton, à réaliser un programme tout tracé dans les *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, pour obtenir des succès merveilleux en appliquant ces principes à l'étude des phénomènes astronomiques et physiques. On ne discutait plus sur les principes; l'heure était venue d'abandonner les spéculations si géniales des Descartes, Leibniz, Newton... et de recueillir l'abondante moisson qu'ils avaient préparée. De ce siècle de *pratique* où l'Univers livrait à l'intelligence humaine tant de secrets, devait naître une philosophie nouvelle et la Philosophie mathématique a joué un rôle considérable dans l'élaboration de la *Critique de la raison pure* et du *Cours de Philosophie positive*. C'est ce que montre M. Brunschvicg dans des pages des plus intéressantes de son Ouvrage.

Les bases scientifiques elles-mêmes devaient se transformer sous l'influence du développement de la Mécanique rationnelle et plus particulièrement de la Mécanique céleste dont le système particulier d'équations différentielles a été l'objet d'un si grand nombre de travaux et reste encore souvent une énigme indéchiffrable. Les géométries non euclidiennes prenaient naissance. M. Brunschvicg dit que « c'est la méditation de la géométrie non euclidienne qui a conduit Kant à la doctrine de l'*Esthétique transcendantale* et qui lui a permis d'insérer les formes d'intuition comme médiatrices entre les catégories du jugement et les principes de Physique rationnelle. » Nous devons cependant faire remarquer que des passages de la *Critique de la raison pure* montrent que Kant, s'il n'ignorait pas la géométrie non euclidienne n'en avait pas compris le sens et la portée. Nous avons déjà eu l'occasion d'aborder ce sujet à propos d'un Ouvrage récemment paru. Mais il n'y a pas place pour une discussion; disons seulement qu'il serait bon, quand on étudie l'influence de la science mathématique sur le kantisme, de séparer d'abord, parmi les notions fondamentales et les principales théories de cette science, celles que Kant ignorait ou avait mal comprises. Les connaissances mathématiques de Kant étaient sur bien des points très bornées; on s'en assure aisément en lisant ses œuvres. Bornons-nous à cette simple remarque.

La continuité était une notion assez mal définie, la question de la convergence des séries n'était jamais posée dans les pro-

blèmes. Il faut aller jusqu'à Cauchy pour arriver à une notion tout à fait précise. Ce savant géomètre renouvela la conception philosophique de la continuité comme on peut s'en rendre compte en passant en revue l'idée que se faisaient de cette notion Euler, Poncelet et les précurseurs de Cauchy. On sait quelles surprises réservait l'étude approfondie de la continuité telle qu'elle a été faite par les mathématiciens modernes. Rien n'est plus intéressant que de retracer brièvement l'évolution de cette notion et de voir comment elle est liée au développement des Mathématiques et quelle répercussion elle eut sur la philosophie des Mathématiques.

8. M. Brunschvicg consacre tout un Livre à l'*Évolution de l'arithmétisme*. La pensée depuis l'antiquité a parcouru trois grandes étapes : logique du nombre, logique des classes, logique des relations spatiales furent leurs aboutissants. Or, la science positive en se développant a montré que la Mathématique n'est nullement esclave des lois de la représentation spatiale. La pensée moderne devait donc tout naturellement invoquer à nouveau la logique du nombre et la logique des classes pour soutenir l'édifice mathématique. Quoi de plus simple et de plus clair que la notion du nombre entier? Sur elle seule repose toute une doctrine pure, sur laquelle ne vient planer aucun des nuages de la controverse métaphysique. On sait qu'il est très commode de fonder sur l'arithmétisme la théorie des nombres irrationnels (par une extension du principe de la limite) ou imaginaires et l'analyse entière. C'est à Méray que l'Auteur fait remonter l'initiative de cette arithmétisation du nombre irrationnel et de l'analyse. Malheureusement, si le nombre entier sert à compter, est-il bien certain que tous les problèmes posés par la nature des choses doivent se résoudre par le calcul des nombres entiers. Peut-on, en quelque sorte, dirons-nous, se borner à cette *arithmétique du dénombrable?* Et même si cela était, peut-on, comme on le faisait, exclure de ces nombres l'infini. Il est vrai que « quelque conception qu'on se fasse du nombre entier, cette conception implique déjà l'idée de l'infini et cela d'une manière nécessaire », comme l'écrivait Tannery après tant d'autres philosophes dont Leibniz et Galilée qui, partant de l'unité pour concevoir $\frac{1}{2}$, ne peut se

refuser à avoir conçu du même coup la divisibilité infinie et à faire ainsi de l'unité le type du nombre infini. Et cependant n'y a-t-il pas des nombres qui échappent aux procédés de calcul basés sur l'arithmétisme? Peut-on *tout* compter avec les nombres entiers? Il est bien évident que jamais l'Arithmétique ne nous permettra de répondre à cette question. Et la base d'une arithmétisation complète de la Mathématique est des plus incertaines. Il ne restait plus qu'à faire appel à la logique des classes, à une Logistique à la manière de celle d'Aristote, mais perfectionnée par l'imitation des procédés de la science moderne, pour tenter de trouver une assise solide à la Mathématique.

9. M. Brunschvicg étudie soigneusement les conditions dans lesquelles est née cette Logistique et les efforts que firent de nombreux philosophes, M. Bertrand Russell en tête, pour apporter une solution dogmatique et positive au problème de la vérité. L'Auteur nous montre les progrès qu'accomplirent la logique des classes, celle des propositions et celle des relations; nous fait assister à la formation de la philosophie logistique des Mathématiques qui devait conduire à la théorie des ensembles, à la notion du transfini, à une revision complète des principes de la science, à une rénovation complète de ses débuts. M. Brunschvicg tente de donner les raisons de la dissolution de cette philosophie logistique. L'incorporation des Mathématiques à la logique implique, selon lui, deux thèses essentielles. L'une vise la réduction de la matière mathématique à la matière logique : une fois qu'on a constitué un calcul ayant pour objet soit les classes ou, ce qui revient au même, les fonctions propositionnelles; soit les relations considérées uniquement dans la généralité de leur forme, on serait capable de rendre raison de la Mathématique proprement dite. L'autre superpose à la logique de la mathématique une métaphysique de la logique : la logique porterait en soi une vertu démonstrative, elle permettrait de conclure « par la force de la forme »; de telle sorte qu'en ramenant la mathématique à la logique, on n'aurait pas seulement fondu ensemble deux disciplines différentes et fait un pas décisif vers l'unité, on aurait encore communiqué aux Mathématiques une valeur de vérité qui leur faisait défaut. Pour savoir ce qu'il est advenu de l'une et

l'autre de ces deux thèses, l'Auteur suit pas à pas l'examen critique de la philosophie logistique tel qu'il a été fait par les logisticiens eux-mêmes sous l'influence de la résistance de certains philosophes et de certains mathématiciens, Henri Poincaré en particulier, influence qui devint prépondérante et provoqua la dissolution de la logistique. Et nous sommes arrivés à l'époque actuelle, tumultueuse, remplie d'indécision et d'incertitude.

10. Ce que le rationalisme n'a pu faire, l'empirisme pourra-t-il le réaliser? Pourra-t-il servir à constituer les éléments d'une science quantitative? En fait, il est à la base de tout et on le retrouve sous les aspects formalistes de l'arithmétisme et de la logistique. Toujours fidèle à la méthode historique, l'Auteur étudie le développement de l'*intuition* dans la Philosophie et dans les sciences; il croit découvrir les sources de mouvement intuitioniste actuel dans la religion et dans la métaphysique, il a étudié ce mouvement et le rôle qu'a joué l'intuition dans la formation et l'évolution des principales notions arithmétiques, géométriques, analytiques. L'Auteur touche aux théories les plus récemment élaborées par des mathématiciens presque tous vivants et pour la plupart même encore jeunes; il est tout à fait impossible de le suivre dans le dernier Livre de son Ouvrage. L'analyse de chaque paragraphe exigerait le résumé d'une théorie souvent délicate et, pour les initiés eux-mêmes, il serait l'objet d'une discussion. C'est, qu'en effet, on se trouve presque toujours sur le terrain peu stable où cherche à s'orienter en ce moment, la Mathématique. Quant aux conclusions de l'Auteur, elles sont résumées à la fin de l'Ouvrage. Quelle que soit l'opinion qu'on en ait, bien qu'il semble difficile de trouver un esprit qui consente à admettre toutes ces conclusions sans aucune restriction, l'effort fait par M. Brunschvicg est l'un des plus considérables qui aient été jamais tentés pour montrer que « la méditation de la discipline, qui a mis dans la recherche du vrai le plus de scrupule et de subtilité, ne risque plus d'accroître l'incertitude et l'instabilité de la pensée philosophique; elle raffermit, en l'éclairant, notre confiance dans la sagesse humaine ». Comme nous l'avons dit, le principe même de la méthode suivie est fort critiquable, l'histoire ne permettant pas de remonter le courant de la pensée mathématique jusqu'à sa

source, ni même assez près de cette source pour qu'il soit possible d'avoir une idée des conditions qui ont présidé à la naissance des grandes notions primordiales comme celle de nombre. Quant à l'orientation de la Mathématique dans l'avenir, elle n'apparaît pas très nettement dans les conclusions de l'Auteur, c'est qu'en effet il était fort difficile d'être prophète. Malgré cela, cet Ouvrage, d'une profonde originalité, a gagné à son Auteur la sympathie du monde scientifique et philosophique, et tout porte à croire que le jugement de l'avenir sera encore plus favorable à M. Brunschvicg que celui de ses contemporains.

GASTON COTTY.

COMBEROUSSE (CHARLES DE). — COURS DE MATHÉMATIQUES. Tome IV : ALGÈBRE SUPÉRIEURE, seconde Partie. 4e édition. 1 vol. gr. in-8, XXIV-832 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1914.

En juillet 1911 nous avons publié dans ce *Bulletin* (p. 199-201) une brève analyse de la quatrième édition de la première Partie de l'Algèbre supérieure, partie formant le Tome III du *Cours de Mathématiques* de Charles de Comberousse. La quatrième édition de la deuxième Partie de cette Algèbre supérieure contient deux sections très importantes, l'Étude des quantités imaginaires et la Théorie des équations, toutes deux traitées avec l'ampleur qui convient à un Ouvrage écrit pour les candidats à l'École Polytechnique, à l'École normale supérieure, à l'École centrale des Arts et Manufactures et à la Licence ès sciences mathématiques.

Remarquant que les quantités imaginaires se sont révélées en résolvant les équations algébriques, l'Auteur a pensé qu'il était tout naturel d'en présenter l'étude avant celle des équations. Il a ainsi, dès 1889, donné à ces quantités « droit de cité » en Algèbre. Il avait alors « la conviction que l'avenir ne ferait qu'accroître l'utilité des quantités imaginaires ». S'inspirant des écrits de J. Bertrand, des travaux de Cauchy, de Briot et Bouquet, il a montré « comment, et sous quelles réserves, on pouvait étendre aux fonctions d'une variable imaginaire les développements en

séries, les règles de la différentiation et les premiers principes du Calcul intégral ».

La Théorie des équations est l'objet de développements très étendus et approfondis. L'Auteur a dépassé souvent les programmes officiels, si sujets à changements. Ainsi, il insiste sur la résolution algébriques des équations « parce qu'il y a là un point capital qui a changé la marche de la Science et ouvert à ses recherches d'autres horizons », et il démontre le théorème d'Abel sur l'impossibilité d'une résolution générale au delà du quatrième degré; il a exposé amplement la résolution des équations transcendantes à cause de leurs nombreuses applications; il a « employé des constructions graphiques, toutes les fois qu'elles pouvaient élucider la question ou abréger les calculs ».

Pour donner une vue générale des matières traitées dans cet Ouvrage, je crois qu'il suffit de donner un extrait de la Table des Matières de ce Volume.

Extrait de la Table des Matières.

Livre VI. *Étude des quantités imaginaires.* — Chap. I. Origine des quantités imaginaires. — Chap. II. Opérations arithmétiques appliquées aux quantités imaginaires. — Chap. III. Introduction des rapports trigonométriques dans les expressions imaginaires. Conséquences. — Chap. IV. Représentation et interprétation géométrique des quantités imaginaires et des opérations sur ces quantités. — Chap. V. Des fonctions de variables imaginaires. — Chap. VI. Différentiation des fonctions d'une variable imaginaire. — Chap. VII. Des intégrales définies des fonctions imaginaires. Extension des formules de Taylor et de Maclaurin aux fonctions d'une variable imaginaire. — Appendice au Livre VI. Notions sur les fonctions hyperboliques.

Livre VII. *Théorie des équations. Premiers principes.* — Chap. I. Propriétés des fonctions entières. Principe fondamental de la théorie des équations. — Chap. II. Conséquences du principe fondamental. Composition des équations. — Chap. III. Des fonctions symétriques. — Chap. IV. Transformation des équations dans les cas les plus simples et les plus usuels. Théorie des équations réciproques. — Chap. V. Facteurs premiers communs à deux fonctions entières. Plus grand commun diviseur algébrique. Racines communes à deux équations. Recherche des diviseurs des fonctions entières d'une variable. — Chap. VI. Théorie des racines égales. — Chap. VII. Propriété fondamentale des dérivées des fonctions entières. Théorème de Cauchy.

Livre VIII. *Théorie des équations* (suite). *De l'élimination.* — Chap. I. Élimination par les fonctions symétriques. — Chap. II. Élimination par la méthode du plus grand commun diviseur. — Chap. III. Autres méthodes d'élimination, expression des résultants sous forme de déterminants. — Chap. IV. Recherche des racines communes à deux équations. — Chap. V. Applications de la théorie de l'élimination.

Livre IX. *Théorie des équations* (suite). *Résolution des équations numériques.* — Chap. I. Théorème de Descartes. — Chap. II. Théorème de Rolle. — Chap. III. Séparation des racines réelles par la méthode de de M. Budan. Théorème de Fourier. Méthode de Lagrange. — Chap. IV. Théorème de Sturm. — Chap. V. Séparation des racines imaginaires. — Chap. VI. Recherche des limites des racines d'une équation. — Chap. VII. Détermination des racines commensurables des équations à coefficients rationnels. — Chap. VIII. Recherche des racines incommensurables. Méthode des parties proportionnelles. — Chap. IX. Recherche des racines incommensurables, Méthode d'approximation de Newton et de Fourier. — Chap. X. Recherche des racines incommensurables. Méthode d'approximation de Lagrange. — Chap. XI. Recherche des racines imaginaires.

Livre X. *Théorie des équations* (suite). *De la résolution algébrique des équations.* — Chap. I. Résolution générale de l'équation du troisième degré. — Chap. II. Résolution générale de l'équation du quatrième degré. — Chap. III. Des fonctions algébriques et de l'impossibilité de résoudre algébriquement les équations générales au delà du quatrième degré. — Chap. IV. Théorie des équations binomes.

Livre XI. *Théorie des équations* (suite et fin). *Questions complémentaires.* — Chap. I. Notions sur la théorie des différences. — Chap. II. De l'interpolation. — Chap. III. Notions sur la résolution des équations transcendantes. — Chap. IV. Méthode des approximations successives. — Chap. V. Décomposition des fractions rationnelles en fractions simples. Des séries récurrentes. — Chap. VI. Étude des polynomes homogènes du second degré.

Questions proposées.

Table des arcs et de leurs rapports trigonométriques, exprimés en parties décimales du rayon 1, pour les 90 premiers degrés.

Ce Livre se fait remarquer par un souci continuel de l'Auteur à enchaîner logiquement les idées et à faire des démonstrations très claires. On y trouve quelques renseignements historiques, surtout aux pages suivantes : 51, 117, 170, 329, 353, 426, 432, 439, 545, 563, 598, 618, 639.

Er. L.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

A. MACMAHON (Major PERCY). — COMBINATORY ANALYSIS. 1 vol. gr. in-8. XIX-300 pages. Cambridge, at the University Press; 1915.

M. Macmahon suppose connus les éléments de l'Analyse combinatoire, et les théories exposées dans cet Ouvrage le sont tout de suite sous une forme très générale. C'est ainsi que les formules ne se rapportent jamais à des objets *a priori* tous distincts, mais toujours à des objets dont α sont identiques à a, β à b, etc. Les formules sur des objets tous distincts s'en déduisent comme cas particuliers.

L'Auteur fait un usage systématique des *fonctions génératrices*. Étant donnée une fonction dans laquelle les valeurs ne reçoivent que des valeurs entières $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on sait que Laplace nomme fonction génératrice de celle-ci la fonction

$$\Sigma F(x_1, x_2, \ldots, x_n) t_1^{x_1} t_2^{x_2} \ldots t_n^{x_n},$$

les t étant les variables, et la sommation étant étendue aux valeurs entières des x. M. Macmahon modifie ces fonctions génératrices en y remplaçant le produit $t_1^{x_1} t_2^{x_2} \ldots t_n^{x_n}$ par la fonction symétrique

$$\Sigma t_1^{x_1} t_2^{x_2} \ldots t_n^{x_n},$$

ce qui est plus commode dans beaucoup de cas. C'est ainsi que dans la première section de l'Ouvrage, l'Auteur établit, par ce moyen, une relation étroite entre l'Analyse combinatoire et la théorie des fonctions symétriques. Cette relation va jusqu'à ce point que les deux théories deviennent équivalentes, toute relation dans l'une donnant une relation dans l'autre. Par exemple, on a la formule

$$(-1)^n a_n = \sum \frac{(-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\ldots}(\lambda_1+\lambda_2+\ldots)!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots} h_1^{\lambda_1} h_2^{\lambda_2} \ldots,$$

le signe Σ étant étendu à toutes les valeurs entières positives des λ telles que $1\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots = n$, de sorte que le second membre est une fonction symétrique des h; et les a étant les fonctions

des h définies par la relation

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = \frac{1}{1 - h_1 x + h_2 x^2 - \ldots}.$$

Eh bien, à cette formule correspond le théorème suivant : *Considérant n objets, le nombre des façons de les distribuer en un nombre pair de paquets dont deux quelconques sont différents, est égal au nombre de façons de les distribuer en un nombre impair de tels paquets, excepté quand les objets sont tous différents deux à deux; dans ce cas le premier nombre est en excès ou en défaut d'une unité sur l'autre, suivant que le nombre d'objets est pair ou impair.*

Nous ne citons point ce théorème pour sa simplicité ou son importance particulière, mais comme exemple de la méthode qui fait ainsi se correspondre deux vérités d'ordre différent. L'Auteur fait un grand usage des opérateurs différentiels d'Hammond.

La deuxième section est consacrée à la théorie des *partitions* et de leurs *séparations*. Une *partition* d'un entier positif n, c'est sa décomposition en une somme d'entiers positifs,

$$n = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5,$$

par exemple, qu'on écrit plus simplement $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$. Deux partitions qui ne diffèrent que par l'ordre des λ sont considérées comme identiques, et une *séparation* de cette partition c'est, par exemple,

$$(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5$$

ou

$$(\lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_4) + (\lambda_2 + \lambda_5),$$

etc.

Les résultats énoncés dans cette section se présentent comme des généralisations de ceux énoncés dans la précédente; en voici un comme exemple : *En symbolisant pour abréger par $(p, q, r, \ldots)$ la fonction symétrique $\Sigma \alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots$, soient $(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ une partition de p, $(q_1, q_2, q_3, \ldots)$ une partition de q, etc.; alors la fonction $(p, q, r, \ldots)$ est exprimable rationnellement au moyen des fonctions symbolisées par des séparations de*

$$(p_1 p_2 p_3 \ldots q_1 q_2 q_3 \ldots).$$

(C'est une généralisation du procédé élémentaire par lequel on

calcule une fonction symétrique au moyen de fonctions d'ordres inférieurs.)

On généralise ainsi la formule de Girard (souvent improprement appelée *formule de Waring*), qui donne la somme s_n des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des racines d'une équation

$$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \ldots = 0$$

en fonction des coefficients.

La formule de Girard est

$$s_n = \Sigma(-1)^{n+j_1+j_2+\cdots} n \frac{(j_1 - j_2 + \ldots - 1)!}{j_1! j_2! \ldots} a_1^{j_1} a_2^{j_2} \ldots,$$

la somme étant étendue aux valeurs entières et positives des j telles que

$$j_1 + 2j_2 + \ldots = n.$$

La généralisation est la suivante : *Soit* $(\lambda^l \mu^m \ldots)$ *une partition de* n.

$\left(\lambda^l \mu^m \ldots \text{ veut dire } \dfrac{\lambda + \lambda + \ldots}{l \text{ fois}} + \dfrac{\mu + \mu + \ldots}{m \text{ fois}} + \ldots\right)$.

Soit $(\lambda^{l_1} \mu^{m_1} \ldots)^{j_1} (\lambda^{l_2} \mu^{m_2} \ldots)^{j_2} \ldots$ *une séparation de cette partition.*

Alors

$$(-1)^{l+m+\ldots} \frac{(l + m + \ldots - 1)!}{l! m! \ldots} (n)$$
$$= \sum \frac{(-1)^{j_1+j_2+\cdots}(j_1 + j_2 + \ldots - 1)!}{j_1! j_2! \ldots} (\lambda^{l_1} \mu^{m_1} \ldots)^{j_1} (\lambda^{l_2} \mu^{m_2} \ldots)^{j_2} \ldots,$$

le signe Σ est étendu aux différentes séparations de la partition $(\lambda^l \mu^m \ldots)$ et les notations telles que $(\lambda^{l_1} \mu^{m_1} \ldots)$ du second membre indiquent des fonctions symétriques comme il a été expliqué plus haut.

Exemple : $(2^2 . 1^2)$ est une partition de 6 qui a comme séparations $(2^2)(1^2)$, $(21)(2)(1)$, $(2^2)(1)^2$, $(1^2)(2)^2$, $(2^2)(1^2)$, $(21)^2$, $(21^2)(2)$, $(2^2 1)(1)$, $(2^2 1^2)$. Alors la formule donne, en revenant aux notations ordinaires,

$$\frac{3}{2} \Sigma\alpha^6 = \frac{3}{2}(\Sigma\alpha^2)^2(\Sigma\alpha)^2 - 2\Sigma\alpha^2\beta . \Sigma\alpha^2 . \Sigma\alpha - \Sigma\alpha^2\beta^2 . (\Sigma\alpha)^2 - \Sigma\alpha\beta . (\Sigma\alpha^2)^2$$
$$+ \Sigma\alpha^2\beta^2 . \Sigma\alpha\beta + \frac{1}{2}(\Sigma\alpha^2\beta)^2 + \Sigma\alpha^2\beta\gamma . \Sigma\alpha^2 + \Sigma\alpha^2\beta^2\gamma . \Sigma\alpha - \Sigma\alpha^2\beta^2\gamma\delta.$$

La troisième section traite des permutations. L'Auteur y démontre un théorème qu'il qualifie de fondamental (master-theorem) et qui est le suivant : *Soit*

$$X_k = a_{1k}x_1 + a_{2k}x_2 + \ldots + a_{nk}x_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Il y a égalité entre les coefficients de $x_1^{\xi_1}x_2^{\xi_2}\ldots x_n^{\xi_n}$ *dans le développement de* $X_1^{\xi_1}X_2^{\xi_2}\ldots X_n^{\xi_n}$ *et dans celui de*

$$\frac{1}{[(1-a_{11}x_1)(1-a_{22}x_2)\ldots(1-a_{nn}x_n)]},$$

le dénominateur de cette dernière expression étant un symbole qui se calcule de la façon suivante : on fait le produit à la façon ordinaire, mais on y remplace un produit tel que $a_{hh}a_{kk}\ldots$ *par le déterminant mineur extrait du Tableau des a et qui a ce produit comme terme principal.*

Parmi les applications du *master-theorem* citons la solution du problème : *trouver le nombre des permutations d'objets donnés dans lesquelles aucun objet n'est à sa place.* Ce dernier problème, lorsque tous les objets sont différents, est connu sous le nom de *problème des rencontres.* Citons encore le problème suivant : *Étant donnés les nombres de voix acquis par les candidats dans une élection, on demande de déterminer les ordres dans lesquels auraient pu être émis les votes, pour que, si l'on avait arrêté le vote à un moment quelconque, le résultat de l'élection n'eût pas été changé (sauf peut-être que deux candidats auraient été* ex-æquo *qui ne l'ont pas été finalement, ou inversement).*

La quatrième section est consacrée aux *compositions* des nombres. Les compositions d'un nombre sont des partitions de ce nombre, mais dans lesquelles on tient compte de l'ordre des parties. Ainsi 3 a trois partitions : (3), (2, 1) et (1^3), mais il a quatre compositions : (3), (2, 1), (1, 2) et (1^3).

M. Macmahon donne une application à la solution d'un problème qu'il appelle *problème de Simon Newcomb : On tire les cartes d'un jeu; aussi longtemps qu'on tire une carte dont la valeur est au moins égale à celle de la précédente, on met ces cartes en un paquet, mais aussitôt que cela cesse d'avoir lieu*

on forme un autre paquet. On demande la probabilité pour que le nombre de paquets ne dépasse pas m.

Pour la solution de ce problème, l'Auteur introduit des fonctions symétriques nouvelles.

Dans la cinquième section il y a un chapitre préliminaire sur les partitions *parfaites* et *sous-parfaites*. On appelle *partition parfaite d'un entier positif*, une partition qui contient une partition et une seule de tout entier positif inférieur; les partitions sous-parfaites sont celles dans lesquelles cette condition est réalisée, mais avec droit d'employer des parties négativement. Exemple : (4, 2, 1) est une partition parfaite de 7, parce que chacun des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 est égal et d'une seule façon à une somme de nombres 4, 2, 1. De même (9, 3, 1) est une partition sous-parfaite de 13, parce que chacun des nombres 1, 2, ..., 13 est égal et d'une seule façon à une somme de termes égaux à $9, \pm 3, \pm 1$. La question élémentaire bien connue qui consiste à peser jusqu'à un poids donné avec le moins grand nombre possible de poids, rentre comme cas particulier dans les précédentes. Le reste de la cinquième section est consacré à des problèmes sur des dispositions à deux dimensions, carrés magiques, échiquiers, etc. Il est remarquable que le calcul différentiel intervient dans un sujet qui en paraît d'abord aussi éloigné. Considérons l'opération $\frac{d}{dx}$ appliquée à la fonction x^n. Au lieu de x^n écrivons $xx \ldots x$. L'opération $\frac{d}{dx}$ peut alors se faire en remplaçant de toutes les façons possibles un x par un 1 et ajoutant les résultats. Si l'on considère maintenant l'opération $\frac{d^n}{dx^n}$, elle se décompose en n opérations semblables à la précédente. Considérons la $r^{\text{ième}}$ de ces opérations, et dans celle-ci le remplacement du $s^{\text{ième}}$ facteur x par 1. Nous ferons correspondre à ce remplacement la case de la $r^{\text{ième}}$ ligne et de la $s^{\text{ième}}$ colonne d'un échiquier ou d'un carré magique. On voit comment s'établit le rapport entre les deux questions. La puissance de ces méthodes se manifeste dans le problème des « carrés latins » : *Étant donné un échiquier de n^2 cases, puis n lettres a_1, n lettres a_2, ..., n lettres a_n; il s'agit de placer dans chaque case une lettre de façon que dans chaque ligne et dans chaque colonne il y ait les n lettres.*

Ce problème, dont la solution a été poursuivie vainement depuis Euler jusqu'à Cayley inclusivement, se trouve résolu sans difficulté par la méthode dont nous parlons.

Enfin, la sixième section traite des partitions de nombres complexes.

Un second Volume paraîtra plus tard, consacré à différentes généralisations et discussions des théories précédentes.

Toutes ces théories sont peu familières aux géomètres du Continent. Elles sont l'œuvre de mathématiciens anglais : Cayley, Sylvester, Hammond, Whitworth, Dickson, et « the last but not the least », M. Macmahon lui-même. Ce dernier travaille le sujet depuis bientôt trente ans, son premier Mémoire datant de 1886. C'est dire qu'on ne saurait trouver dans l'étude de ces questions un guide plus qualifié.

Mais la mode n'est pas là en ce moment et beaucoup regretteront que tant d'ingéniosité soit dépensée à des questions aussi futiles. Mais pourquoi sont-elles futiles? Est-ce parce qu'on y parle d'échiquiers et de jeux de cartes? Ce ne sont là que des représentations. Si l'on y parlait d'arrangements de molécules, la théorie prendrait tout de suite un air plus sérieux, tout en restant la même au fond. Si elle n'a pas d'applications maintenant, elle en aura peut-être plus tard. Rappelons-nous toujours que les Grecs ont résolu sur les sections coniques des questions futiles qui, deux mille ans plus tard, ont servi à l'établissement de théories astronomiques d'où est sortie la Mécanique moderne et la construction des automobiles et des avions blindés.

E. Cahen.

PÉRÈS (Joseph). — Sur les Fonctions permutables de première espèce de M. Vito Volterra. *Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques*, soutenue le 28 mai 1915 sous la présidence de M. E. Goursat. 1 vol. in-4°, III-99 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1915.

1. Au début de ce travail, M. Pérès rappelle les principes de la *théorie de la permutabilité* de M. Volterra : on considère comme une multiplication symbolique $\dot{f}\dot{g}$ l'opération, dite *com-*

position

$$\overset{*}{f}\overset{*}{g} = \int_x^y f(x, t)\, g(t, y)\, dt,$$

et l'on dit que deux fonctions $f(x, y)$, $g(x, y)$ sont *permutables* entre elles si $\overset{*}{f}\overset{*}{g} \equiv \overset{*}{g}\overset{*}{f}$. A des fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_m, \ldots$, permutables deux à deux, on peut alors appliquer un calcul fonctionnel dont les formules se déduisent de celles de l'Algèbre et de la théorie des séries entières en y remplaçant les variables par les symboles $\overset{*}{F}_1, \overset{*}{F}_2, \ldots, \overset{*}{F}_m, \ldots$. C'est ainsi que, si $\zeta = Q(z_1, \ldots, z_m)$ est la série entière qui résout l'équation

$$(1) \qquad P(z_1, \ldots, z_m, \zeta) = 0,$$

où P est un polynome, ou une série entière, sans terme constant et ayant un terme en ζ, la formule symbolique $\overset{*}{\chi} = Q(\overset{*}{F}_1, \ldots, \overset{*}{F}_m)$ donne la solution (unique) de l'*équation intégrale*

$$(2) \qquad P(\overset{*}{F}_1, \ldots, \overset{*}{F}_m, \overset{*}{\chi}) = 0.$$

Ce beau résultat, qui montre l'importance de la notion de permutabilité, est, cependant, comme le montre M. Pérès, applicable dans des conditions plus étendues : l'hypothèse de la permutabilité n'est pas indispensable [1], et l'on peut supposer que la série $\zeta = Q$ satisfait, seulement, *formellement* à l'équation (1), pourvu que la série déduite de la série P en divisant chaque terme par la factorielle $p!$ qui correspond à son degré p ait un domaine de convergence.

2. L'objet principal de la Thèse est la *détermination des fonctions φ permutables avec une fonction donnée* F. M. Volterra a résolu la question pour une fonction F d'ordre [2] $n = 1$ et $n = 2$.

---

[1] Cela est connu pour l'équation de Volterra de deuxième espèce

$$\overset{*}{\chi} + \overset{*}{F}_1 \overset{*}{\chi} = \overset{*}{F}_2.$$

[2] M. Volterra dit que F est d'ordre 1, si $F(x, x)$ ne s'annule pas; et que F est d'ordre $n > 1$, si F et ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $(n-2)$ s'annulent pour $y = x$; les dérivées d'ordre $(n-1)$ sont alors égales pour $y = x$, au signe près, à une même fonction $\alpha(x)$ qui est supposée ne pas s'annuler, si l'ordre ne dépasse pas n.

M. Pérès étend au cas général la méthode employée par M. Volterra. Elle consiste à prendre pour inconnue la fonction

$$(3) \qquad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{F} = \Phi,$$

qui, grâce à une transformation auxiliaire effectuée sur les variables et sur F, est définie par une équation intégro-différentielle

$$(4) \qquad \frac{\partial^n \Phi}{\partial y^n} - (-1)^n \frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} = A,$$

où A est de la forme (symbolique)

$$\overset{*}{F}_1\left(\frac{\partial^{n-1}\overset{*}{\Phi}}{\partial x^{n-1}}\right) + \left(\frac{\partial^{n-1}\overset{*}{\Phi}}{\partial y^{n-1}}\right)\overset{*}{F}_2.$$

De plus, Φ doit s'annuler sur la droite $y = x$, ainsi que ses dérivées $\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1}\Phi}{\partial x^{n-1}}$. La résolution de cette équation par rapport à Φ, en considérant A comme connu, la ramène à une forme qui permet d'appliquer la méthode des approximations successives; Φ étant connu, on en déduit φ au moyen de l'équation (3), qui est une équation de Volterra de première espèce : Φ et, par suite, φ se trouvent dépendre d'une fonction arbitraire d'une variable indépendante.

M. Pérès insiste sur ce point que la difficulté particulière au cas $n > 2$ tient à ce que l'équation (4) est alors une équation ayant des caractéristiques imaginaires, pour laquelle on doit résoudre un problème de Cauchy : il est conduit, de ce fait, à se limiter au cas où les fonctions F et φ sont analytiques. La méthode symbolique d'intégration de Cauchy lui fournit alors la formule de résolution de cette équation (4) au moyen de quadratures.

Une conséquence importante de cette détermination générale des fonctions φ est qu'on peut choisir φ de manière que la différence $(F - \overset{*}{\varphi}{}^p)$, où p est un diviseur quelconque de $n+1$, soit d'ordre supérieur à n. C'est, en effet, sur cette propriété qu'est fondée, en particulier, la méthode donnée par M. Volterra pour résoudre l'équation intégrale (définissant les racines $p^{\text{ièmes}}$ symboliques)

$$(5) \qquad \overset{*}{\psi}{}^p = F.$$

3. La méthode précédente de détermination des fonctions φ permutables avec F est en défaut si les variables d'intégration doivent passer par une des variables a telles que l'ordre de F s'élève pour $x = y = a$. Cela tient à la nature des transformations préliminaires effectuées sur F; mais cela tient aussi à l'emploi de l'équation de Volterra de première espèce (3), pour laquelle cette circonstance constitue un *cas singulier* classique, mais qui n'a été approfondi qu'au point de vue des variables réelles et des solutions finies.

A l'exemple de ce qu'a fait M. E. Picard pour l'équation de Fredholm, M. Pérès se place, plus généralement, au point de vue des variables complexes : x et y sont de telles variables, et les points qui les représentent dans le plan des variables complexes pourront se déplacer dans un même domaine (D) d'où l'on exclut les singularités de F. Les valeurs a sont les affixes de certains points de ce domaine que les chemins d'intégration éviteront tant que leurs extrémités (x et y) ne viendront pas en l'un deux. Si le domaine (D) n'en contient aucun, Φ, φ, ψ sont holomorphes dans tout ce domaine : c'est une nouvelle analogie de l'équation de Volterra avec les équations différentielles linéaires. Si au contraire un point a se présente, il sera en général un point critique : M. Pérès le montre, par des exemples simples, pour l'équation de Volterra (3) et pour l'équation (5); pour cette dernière, l'étude complète de cette singularité peut dépendre de celle des singularités, dans tout le plan d'une équation intégrale non linéaire dont l'inconnue est fonction d'une seule variable. En fait, l'étude de ces singularités, pour les fonctions φ permutables avec F, paraît inabordable par la méthode des approximations successives : celle-ci peut même masquer les cas où ces points a sont seulement à *apparence singulière*. Et c'est par une autre méthode, fondée sur l'emploi de développements en série de la forme $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x) \frac{(y-x)^k}{k!}$, que M. Pérès peut caractériser ces cas.

4. Dans le cas particulier $F = 1$, les fonctions φ permutables à F sont les fonctions de la seule variable $(y - x)$; de là une analogie remarquable, signalée et utilisée déjà par M. Volterra, entre la théorie de la permutabilité et celle des fonctions d'une

seule variable. Si l'on remarque, de plus, que $\overset{*}{1}^{m+1} = \frac{(y-x)^m}{m!}$, on voit que l'analogue des séries de Taylor sera donné par les séries de la forme

$$(6) \qquad a_0 F + a_1 \overset{*}{F}{}^2 + \ldots + a_m \overset{*}{F}{}^{m+1} + \ldots.$$

M. Volterra a donné, au point de vue réel surtout, une formule du reste d'une telle série analogue au reste de la formule de Taylor limitée.

Au point de vue de la recherche des fonctions φ, il est évident qu'une série (6), convergente, en représente toujours une. M. Pérès approfondit la réciproque. Il donne la condition nécessaire et suffisante pour la convergence de la série (6), au voisinage de la multiplicité (complexe) $y = x$. Si F est d'ordre 1, cette condition est que la série $\sum a_m \frac{z^m}{m!}$ ait un rayon de convergence non nul. Sous cette hypothèse ($n = 1$), il prouve que, si F est holomorphe dans le voisinage de $x = y = 0$, toute fonction φ, holomorphe dans ce même voisinage, peut se représenter par une série (6). On a ainsi une nouvelle solution du problème de la recherche des fonctions φ analytiques, qui met plus facilement en évidence leur mode d'existence : il en résulte, en particulier, que contrairement à ce que pouvaient faire penser les difficultés précédemment observées au point de vue des approximations successives, une telle fonction φ, holomorphe au voisinage de $x = y = 0$, demeure holomorphe, en même temps que F, au voisinage des autres points de la multiplicité $y = x$, même au voisinage des points $x = y = a$ pour lesquels l'ordre de F s'élève.

Les points a sont donc ici, nécessairement, des points à apparence singulière; et le même fait s'étend aux équations de Volterra (3) et à l'équation (5) quand les données sont des fonctions analytiques permutables avec une fonction f holomorphe d'ordre 1. C'est là une propriété remarquable de la permutabilité.

Les fonctions φ non analytiques peuvent, en poursuivant l'analogie avec les fonctions d'une variable, se représenter par des séries de polynomes en F, $\overset{*}{F}{}^2$, . . . ; et M. Pérès généralise aussi, à leur égard, la théorie des polynomes d'approximation de Tchebichew.

Si la fonction donnée F est d'ordre n supérieur à 1, M. Pérès lui substitue, dans les développements précédents, conformément à une méthode connue, une solution de l'équation $\psi^n = F$. Mais la difficulté relative aux points a, pour lesquels l'ordre de F s'élève, reparaît de ce fait. M. Pérès donne les conditions pour qu'un tel point soit un point à apparence singulière pour *toutes* les fonctions φ. S'il n'en est pas ainsi, il pense, sans pouvoir le démontrer en toute généralité, que celles des fonctions φ qui restent holomorphes autour de $x = y = a$ sont encore développables en une série de la forme (6). Une étude plus approfondie des singularités de l'équation (5) lui paraît indispensable pour pouvoir se prononcer sur cette question.

5. On voit que le travail très distingué de M. Pérès fait faire à la théorie des fonctions permutables de première espèce des progrès importants. L'orientation des recherches et les méthodes à employer résultaient sans doute, dans l'ensemble, des travaux même de M. Volterra; mais il y avait à vaincre des difficultés sérieuses pour obtenir, dans cette voie, des résultats nouveaux et intéressants. L'étude des singularités est, de plus, nouvelle et paraît ouvrir un champ de recherches fécond.

La R.

MIER (Édouard). — Les équations fondamentales et l'amortissement des Sismographes. Traduit de l'espagnol par L. P. (Ministère de l'Instruction publique et des Beaux-Arts : *Institut géographique et statistique*). Une brochure gr. in-8, 62 pages. Madrid. Imprimerie de l'Institut géographique et statistique; 1914.

Le colonel du génie Mier, Membre de l'Académie royale des Sciences de Madrid, Inspecteur général du Corps des Ingénieurs-Géographes, auteur de nombreux écrits sur la Sismologie, occupe, en Espagne, une situation officielle qui répond de la compétence avec laquelle il peut exposer ses vues personnelles en Sismologie.

A l'ordre du jour du Congrès que l'Association internationale de Sismologie devait tenir à Pétrograd, en août-septembre 1914,

figurait le vœu « que tous les instruments destinés à l'étude du vrai mouvement du sol, soient pourvus d'amortisseurs et que l'heure indiquée par eux soit régulièrement contrôlée par la réception de signaux radiotélégraphiques ».

Le colonel Mier applaudit à la seconde partie de ce vœu. Sur son initiative, tous les Observatoires sismologiques qui dépendent de l'Institut géographique et statistique de l'Espagne ont été pourvus de stations réceptrices radiotélégraphiques, et, parmi ces Observatoires, celui de Tolède en possède depuis le mois de juin 1913.

Mais le colonel Mier ne pense pas que l'emploi des amortisseurs dans les pendules sismographiques résolve complètement ce problème « obscur et complexe » : Déduire des sismogrammes toutes les caractéristiques des mouvements sismiques.

Considérant que « tous ceux qui s'occupent d'études scientifiques doivent être des partisans enthousiastes de la vérité », le colonel Mier s'est cru obligé de publier cette Brochure critique, car « les études sismologiques actuelles lui paraissent reposer sur des bases fausses et s'acheminer par des détours qui pourraient amener de graves conséquences pour l'avenir de la Sismologie ».

L'Auteur a donc cherché à montrer que les sismographes actuellement employés ne peuvent que conduire à des erreurs; et, dans l'intérêt de la Science, il désire que les savants qui s'occupent de Sismographie étudient ses critiques, afin d'en déduire le bien-fondé ou la fausseté.

Titre des Chapitres.

1. Établissement des équations fondamentales. — 2. Comparaison entre les équations des sismographes pourvus ou non d'amortisseurs. — 3. Hypothèse de la loi sinusoïdale du mouvement de l'axe. — 4. Hypothèses $\sin\theta = 0$, $\cos\theta = 1$. — 5. Hypothèse de l'indépendance entre des fragments consécutifs d'un même sismogramme. — 6. Observations au sujet du facteur $e^{\varepsilon t}$. — 7. Hypothèse de l'action d'une seule des composantes du mouvement sismique sur l'axe du pendule. — Équations différentielles du mouvement des pendules verticaux, horizontaux et inclinés. — 8. Mécanisme de l'inscription des sismogrammes. — 9. Amortisseurs.

Er. L.

MÉLANGES.

SUR UN MÉMOIRE DE M. SUNDMAN;

PAR M. J. HADAMARD.

1. On connaît les belles recherches par lesquelles M. Sundman a transformé la théorie du problème des trois corps. Ces recherches sont exposées dans trois Mémoires principaux : deux insérés dans les *Acta Societatis Fennicæ* (¹) et dont j'aurai à mentionner le premier, que je désignerai par *A. S. F.*; un qui, d'ailleurs, reprend les deux précédents et constitue, par conséquent, à lui seul, un exposé complet et qui est inséré aux *Acta mathematica* (²); je le désignerai par *A. M.*

Étant donnée l'importance fondamentale de ces travaux, peut-être ne sera-t-il pas sans intérêt pour le lecteur de signaler, dans ce dernier Mémoire, une inadvertance, laquelle est d'ailleurs sans aucune répercussion sur l'ensemble des résultats. Elle porte, en effet, sur le n° 12 (*A. M.*, p. 130) du Mémoire en question, lequel peut, à la rigueur, être laissé de côté au point de vue du reste du raisonnement.

Ayant écrit (moyennant l'introduction d'une nouvelle variable indépendante u à la place du temps) les équations du mouvement sous une première forme (*A. M.*, n° 11),

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{dx}{du}, & \frac{dx'}{du} &= \frac{r'}{r}x' - \frac{(m_0+m_1)x}{r} + r^2 X,\\ y' &= \frac{dy}{du}, & \frac{dy'}{du} &= \frac{r'}{r}y' - \frac{(m_0+m_1)y}{r} + r^2 Y,\\ z' &= \frac{dz}{du}, & \frac{dz'}{du} &= \frac{r'}{r}z' - \frac{(m_0+m_1)z}{r} + r^2 Z; \end{aligned}\right.$$

$$(1')\quad \left\{\begin{aligned} r\xi' &= \frac{d\xi}{du}, & \frac{d\xi'}{du} &= r\Xi,\\ r\eta' &= \frac{d\eta}{du}, & \frac{d\eta'}{du} &= r\mathrm{H},\\ r\zeta' &= \frac{d\zeta}{du}, & \frac{d\zeta'}{du} &= r\mathrm{H} \end{aligned}\right.$$

(¹) T. 34, 35.
(²) T. 36, p. 105 et suiv.

avec

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

et (intégrale des forces vives)

$$(3) \qquad g(x'^2 + y'^2 + z'^2) + hr^2(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = r^2(2U - K)$$
$$(g,\ h,\ K = \text{const.}).$$

l'auteur en déduit un autre système (S), au sujet duquel nous renverrons au Mémoire cité [*A. M.*, n° 11, équation (79)] et qu'il substitue au premier.

Il se propose, au n° 12, de savoir si, inversement, une solution du système (S) satisfait aux équations primitives [1].

Il n'y a aucune difficulté, à cet égard, en ce qui regarde les équations (1), (1') et l'on n'a à se préoccuper que des équations (2), (3).

Soit

$$H = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}{2},$$

$$G = \frac{g}{r^2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + h(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) - 2U + K.$$

Si nous considérons treize fonctions x, y, z, x', y', z', ξ, η, ζ, ξ', η', ζ', r de la variable indépendante u, satisfaisant au système (S) et aussi à (1), (1'), et si nous cherchons quelles relations en résultent entre H et G, nous trouverons

$$(E) \qquad \left\{ \begin{aligned} &-\frac{G}{g} r^3 + r\frac{d^2H}{du^2} - r'\frac{dH}{du} + 2(m_0 + m_1)H = 0, \\ &\frac{dG}{du} + \frac{2g(m_0 + m_1)}{r^3}\frac{dH}{du} = 0 \\ &\left(r' = \frac{dr}{du}\right). \end{aligned} \right.$$

La seconde de ces équations est bien équivalente à la seconde équation (82) de M. Sundman (*A. M.*, p. 131). Mais, dans la première, le dernier terme $2(m_0 + m_1)H$ a été omis par le géo-

[1] Cette propriété appartenant, par hypothèse, avant le choc aux solutions que considère exclusivement l'auteur, subsiste après le choc, par le fait même qu'il y a prolongement analytique, et c'est pour cela que sa démonstration n'est pas indispensable à la suite du raisonnement.

mètre suédois $\left(\text{ce qui lui permet de simplifier en introduisant, au lieu de H, l'inconnue } W = -\frac{dH}{du}\right)$.

2. Le système (E) se traite d'ailleurs comme celui de M. Sundman tant que les conditions initiales ne correspondent pas à $r = 0$.

Mais il est précisément intéressant de traiter la question d'équivalence qui nous occupe en se plaçant dans le voisinage d'un choc, qui est précisément le phénomène étudié par l'auteur. Or, pour une valeur u_0 de u telle que r s'annule, le système des équations (E) [comme le système (82) écrit dans le Mémoire des *A. M.*], cesse de tomber sous le coup des théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles, de sorte qu'il ne suffit plus, pour démontrer que G et H sont identiquement nuls, de s'assurer que G, H, $\frac{dH}{du}$ s'annulent avec $u - u_0$.

Le complément demandé est, d'ailleurs, aisé à apporter. L'élimination de G fournit, pour H, l'équation linéaire

$$(E_1) \qquad \frac{d^3 H}{du^3} - \frac{3r'}{r}\frac{d^2 H}{du^2} + \left[\frac{4(m_0 + m_1)}{r} - r^2 \frac{d}{du}\left(\frac{r'}{r^3}\right)\right]\frac{dH}{du} + 2(m_0 + m_1) r^2 \frac{d}{du}\left(\frac{1}{r^3}\right) H = 0.$$

Or si, pour $u = u_0$, on suppose $x = y = z = r = 0$, ce qui donne déjà [1],

$$(4) \qquad H = \frac{dH}{du} = 0$$

et si, en outre (toujours pour cette même valeur de u), on suppose également

$$(4') \qquad \frac{d^2 H}{du^2} = 0,$$

on constate aisément [à l'aide des équations (1) et de *A. M.*, équation (75), p. 128)] que, $(u - u_0)$ étant considéré comme infiniment petit), r a pour partie principale

$$\frac{m_0 + m_1}{2}(u - u_0)^2.$$

---

[1] Les inconnues sont supposées holomorphes en u.

L'équation (E_1) s'écrit, dans ces conditions,

$$\frac{d^3 H}{du^3} - \left(\frac{6}{u-u_0} + \ldots\right)\frac{d^3 H}{du^2} + \left[\frac{18}{(u-u_0)^2} + \ldots\right]\frac{dH}{du} - \left[\frac{24}{(u-u_0)^3} + \ldots\right] H = 0.$$

Elle a donc (pour $u = u_0$) ses intégrales régulières, et l'équation fondamentale déterminante a pour racines 2, 3, 4.

Dès lors, *pour que* H *soit identiquement nul, il est nécessaire et suffisant qu'il soit d'ordre supérieur à* 4 *en* $u - u_0$, c'est-à-dire que, outre (4) et (4'), on ait pour $u = u_0$

$$\frac{d^3 H}{du^3} = \frac{d^4 H}{du^4} = 0.$$

x, y, z sont d'ailleurs, comme r, du second degré par rapport à $(u - u_0)$. La condition cherchée est donc que les coefficients

$$\frac{x_0''}{2}, \quad \frac{y_0''}{2}, \quad \frac{z_0''}{2}$$

de $(u - u_0)^2$ dans leurs développements respectifs vérifient la relation

$$\left(\frac{x_0''}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_0''}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_0''}{2}\right)^2 = \left(\frac{m_0 + m_1}{2}\right)^2,$$

ainsi qu'il était d'ailleurs évident *a priori* [1].

---

[1] On peut, à notre point de vue, ramener l'intégration du système (E) à celle d'une seule équation linéaire du second ordre. Si, en effet, entre les deux équations (E), on élimine algébriquement $(m_0 + m_1)$, on trouve

$$\frac{1}{g}\left(H\frac{dG}{du} + G\frac{dH}{du}\right) - \frac{1}{r^3}\frac{dH}{du}\left(r\frac{d^2H}{du^2} - \frac{dr}{du}\frac{dH}{du}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left[\frac{1}{r^2}\left(\frac{dH}{du}\right)^2\right],$$

c'est-à-dire

$$2\frac{HG}{g} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{dH}{du}\right)^2 = \text{const.}$$

Admettons que le premier membre s'annule pour $u = u_0$: la constante devra être nulle. En tirant de là la valeur de G et reportant dans (E), on trouve, pour H, l'équation différentielle

$$\frac{1}{2} r\left(\frac{dH}{du}\right)^2 = rH\frac{d^2H}{du^2} - rH\frac{dH}{du} + 2(m_0 + m_1)H^2;$$

en posant $H = H_1^2$, ceci donne

$$r\frac{d^2H_1}{du^2} - \frac{dr}{du}\frac{dH_1}{du} + (m_0 + m_1)H_1 = 0.$$

3. Le prolongement des solutions au delà d'un choc simple (deux des corps seulement se rencontrant), par le moyen de la variable u et du système (S), est la première conclusion fondamentale obtenue par M. Sundman.

La seconde consiste dans le fait que, *si les constantes des aires ne sont pas nulles toutes les trois, les trois distances mutuelles ne peuvent devenir simultanément infiniment petites.*

J'ai, dans mon enseignement au Collège de France, exposé, pour démontrer ce second théorème, une méthode différente de celle de son auteur, et peut-être un peu plus simple. Je me propose de l'indiquer ici.

Supposons donc que l'une au moins des constantes des aires soit différente de zéro : par exemple la constante a, celle qui est relative à l'axe des z et que nous supposerons, pour fixer les idées, être la plus grande des trois en valeur absolue.

Il s'agit, dans ces conditions, en supposant que l'une des distances mutuelles tombe au-dessous d'une certaine quantité $\varkappa$ (que nous pourrons d'ailleurs prendre aussi peu différente de zéro que nous le voudrons), de trouver une limite inférieure des deux autres distances.

Employons d'abord [1], non le changement d'inconnues dont nous venons de faire usage avec M. Sundman, mais la transformation analogue (et d'ailleurs également classique) dont l'auteur fait usage dans son précédent Mémoire (*A. S. F.*, p. 2, n° 2). Avec les notations de M. Sundman, la première équation (16) du Travail en question nous montre que l'une au moins des quantités

$$\frac{|U_0|}{m_0}, \quad \frac{|U_1|}{m_1}, \quad \frac{|U_2|}{m_2}$$

est supérieure à $\frac{|a|}{3}$ (avec $a \neq 0$, par hypothèse) : soit, pour fixer les idées,

$$\frac{|U_0|}{m_0} \geqq \frac{a}{3}.$$

S'il en est ainsi, l'équation des forces vives, laquelle peut

---

[1] Il est entendu que, dans ce qui suit, la variable indépendante est à nouveau le temps t.

s'écrire

$$(5)\qquad \sum_{i=0}^{i=2} \frac{1}{m_i}\left[\left(\frac{dr_i}{dt}\right)^2 + \frac{1}{r_i^2}(U_i^2 + V_i^2 + W_i^2)\right]$$
$$= 2U - K = 2\left(\frac{M}{m_0 r_0} + \frac{M}{m_1 r_1} + \frac{M}{m_2 r_2}\right) - K$$
$$(M = m_0 + m_1 + m_2),$$

montre, en la multipliant par r_0^2, que la quantité

$$(6)\qquad \frac{2M}{m_0} r_0 + \frac{2M}{m_1}\frac{r_0^2}{r_1} + \frac{2M}{m_2}\frac{r_0^2}{r_2}$$

est supérieure à

$$(7)\qquad m_0 \frac{a^2}{9} - |K| r_0^2.$$

Dès lors, l'un au moins des termes de (6) doit être supérieur au tiers de la quantité précédente.

Si c'est le premier, il est clair que

$$(8)\qquad r_0 > k_1,$$

pourvu que k_1 soit au plus égal à la racine positive de l'équation

$$(8')\qquad |K| \frac{k_1^2}{3} + \frac{2M}{m_0} k_1 - m_0 \frac{a^2}{27} = 0.$$

ou, comme nous le supposerons de préférence, à la plus petite des racines des trois équations analogues déduites de celle que nous venons d'écrire, en y remplaçant m_0 successivement par m_0, m_1, m_2.

S'il en est ainsi, notre conclusion est démontrée.

Sinon, la limite inférieure indiquée tout à l'heure pour

$$\frac{2M}{m_0} r_0$$

convient à l'un des deux termes restants de (6), par exemple, au dernier, soit

$$\frac{2M}{m_2}\frac{r_0^2}{r_2} > \frac{m_0 a^2}{27} - \frac{|K|}{3} r_0^2$$

ou (si l'on n'a pas l'inégalité $r_0 > k_1$)

$$(9)\qquad \frac{r_0^2}{r_2} > \frac{m_2}{2M}\left(\frac{m_0 a^2}{27} - \frac{|K|}{3} k_1^2\right) = \frac{m_2}{m_0} k_1.$$

Nous avons donc ainsi une limite inférieure du rapport $\frac{r_0^2}{r_2}$.

Ceci entraîne tout d'abord une limite inférieure analogue (¹) *pour* $\frac{r_1^2}{r_2}$, savoir

$$\frac{r_1^2}{r_2} > \frac{(r_0 - r_2)^2}{r_2} > \frac{m_2}{m_0} k_1 - 2 r_0$$

ou

$$\frac{r_1^2}{r_2} > \frac{m}{M} \frac{k_1}{2} = k_2 \tag{10}$$

(m désignant la plus petite des masses m_i) à moins qu'on n'ait

$$r_0 > \frac{k_2}{2}. \tag{11}$$

r_2 *est dès lors* (s'il tend vers zéro) *la plus petite des trois distances*, et même *les rapports* $\frac{r_2}{r_0}$, $\frac{r_2}{r_1}$ *sont très petits avec* r_2. Dans l'hypothèse où nous devons nous placer de $r_2 < \varkappa$, on a

$$\frac{r_2}{r_0}, \quad \frac{r_2}{r_1} > \sqrt{\frac{r_2}{k_2}} > \sqrt{\frac{\varkappa}{k_2}}. \tag{12}$$

Il en résulte, en particulier :

1° Que (conformément aux conclusions générales de M. Sundman) r_2 *ne peut échanger son rôle avec* r_0 *ou* r_1, tant que l'une de ces trois distances reste inférieure à $\varkappa$. Si, en effet, le dernier membre de (12) est inférieur (et non égal) à 1, ce qui a lieu pour

$$\varkappa < k_2, \tag{13}$$

l'inégalité (12) est incompatible avec les inégalités analogues obtenues en permutant les indices aux premiers membres.

2° Que U_2, V_2, W_2 *sont très petits avec* r_2. Pour $r_2 < \varkappa$,

---

(¹) Il est clair que les inégalités (10), (12) ont également lieu, même dans l'hypothèse (8) ou (11), si $\varkappa$ est suffisamment petit, savoir si l'on a

$$k_2 \varkappa < \left(\frac{k_2}{2} - \varkappa\right)^2. \tag{13'}$$

Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'il en est ainsi.

l'équation (5) de forces vives, multipliée par r_2^2, donne

$$(14)\quad |U_2|,\ |V_2|,\ |W_2| < \sqrt{m_2\left(\frac{2M}{m_2}r_2 + \frac{2M}{m_0}\frac{r_2^2}{r_0} + \frac{2M}{m_1}\frac{r_2^2}{r_1} - Kr_2^2\right)}$$
$$< \sqrt{2M\varkappa\left[1 + \left(\frac{m_2}{m_0} + \frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{\frac{\varkappa}{k_2}} + \frac{|K|m_2\varkappa}{2M}\right]}$$
$$< \sqrt{\varkappa}\,k_3.$$

4. A partir de ce moment, il est préférable de revenir à la notation du Mémoire des *Acta mathematica* [*A. M.*, p. 109, équations (9-19)], dans laquelle les notations x, y, z, r ont d'ailleurs le même sens que x_2, y_2, z_2, r_2 dans le Mémoire des *A. S. F.*, pendant que la position du système est, en outre, définie par les coordonnées relatives ξ, η, ζ du troisième point, par rapport au centre de gravité des deux premiers. On a posé

$$\rho = +\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

L'inégalité (10) subsiste évidemment en remplaçant r_1 par ρ : on a donc aussi

$$(10')\qquad \frac{\rho^2}{r} > k_2,\quad \frac{r}{\rho} < \sqrt{\frac{\varkappa}{k^2}}.$$

La forme des intégrales des aires [*A. S. F.*, formules (31)] (¹) montre que les quantités

$$\alpha = \xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt},\qquad \beta = \eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt},\qquad \gamma = \zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt}$$

diffèrent de $\frac{a}{h}$, $\frac{b}{h}$, $\frac{c}{h}$ de quantités inférieures au produit de $\frac{\varepsilon}{h}$ par la limite supérieure (14). α sera donc différent de zéro, on aura (²)

$$(15)\qquad |\alpha| > \frac{a}{h} - \frac{\varepsilon}{h}k_3\sqrt{\varkappa}.$$

(¹) Nous nous référons ici à *A. S. F.* et non à *A. M.*, la notation employée pour désigner les constantes des aires étant celle du premier de ces deux Mémoires.

(²) Le second membre de (15) devant être positif et non nul, $\varkappa$ est supposé vérifier l'inégalité

$$(15')\qquad 2M\varkappa\left[1 + \left(\frac{m_2}{m_0} + \frac{m_2}{m_1}\right)\sqrt{\frac{\varkappa}{k^2}} + \frac{|K|m_2\varkappa}{2M}\right] < \frac{a^2}{g^2},$$

égalité exclue.

Par contre, on a aussi une limite supérieure des modules de α, β, γ, savoir

$$(16) \qquad |\alpha|, \quad |\beta|, \quad |\gamma| < \frac{a}{h} + \frac{g}{h} k_3 \sqrt{\varkappa}.$$

Pour trouver une limite inférieure de ρ, nous allons nous proposer d'obtenir une limite supérieure pour la vitesse

$$V = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2}$$

du point (ξ, η, ζ).

Soit t_1 le premier instant où r prend la valeur $\varkappa$ pour rester au-dessous de cette valeur jusqu'à l'instant t_0.

A partir de l'instant t_1, les évaluations précédentes deviennent toutes valables. Dès lors, dans l'équation de Lagrange

$$(17) \qquad \frac{d^2(R^2)}{dt^2} = 2\left(\frac{M}{m_0 r_0} + \frac{M}{m_1 r_1} + \frac{M}{m_2 r_2} - K\right),$$

$$(17') \qquad \left(R^2 = \frac{r_0^2}{m_0} + \frac{r_1^2}{m_1} + \frac{r_2^2}{m_2} = gr^2 + h\rho^2\right)$$

que nous emploierons à l'exemple de M. Sundman, le second membre peut s'écrire

$$(18) \qquad \frac{d^2(R^2)}{dt^2} = \frac{2M}{m_2 r}(1 + \varepsilon),$$

ε étant très petit en même temps que r. D'une manière précise

$$(19) \qquad |\varepsilon| < m_2\left[\sqrt{\frac{\varkappa}{k_2}}\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1}\right) + \varkappa\frac{|K|}{2M}\right].$$

Nous supposerons $\varkappa$ assez petit pour que $|\varepsilon|$ soit plus petit que 1, soit

$$(19') \qquad m_2\left[\sqrt{\frac{\varkappa}{k_2}}\left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1}\right) + \varkappa\frac{|K|}{2M}\right] < 1,$$

égalité exclue.

Intégrons la relation (18) (dans laquelle la valeur commune des deux membres est constamment positive) depuis un instant $t'_1 \geqq t_1$ jusqu'à l'instant τ du minimum de R (ce minimum étant d'ailleurs

zéro ou > 0). Il vient

$$\int_{t_1}^{\tau} \frac{dt}{r} = \frac{m_2}{2M(1+\varepsilon_1)} \left[-\frac{d(R^2)}{dt} \right]_{t=t_1},$$

ε_1 étant une valeur de ε, c'est-à-dire une quantité qui satisfait à (19). A cause de (10), ceci donne une limite supérieure de chacune des quantités

$$\int_{t_1}^{\tau} \frac{dt}{r_0^2}, \quad \int_{t_1}^{\tau} \frac{dt}{r_1^2},$$

savoir

$$(20) \qquad \int_{t_1}^{\tau} \frac{dt}{r_i^2} < \frac{m_2}{2Mk_2(1+\varepsilon_1)} \left[-\frac{d(R^2)}{dt} \right]_{t=t_1} \qquad (i = 0, 1).$$

Or, le point (ξ, η, ζ) peut [1] être considéré comme ayant une masse égale à 1 et se mouvant sous l'action de deux forces newtoniennes d'intensités respectives

$$\frac{M\lambda}{r_0^2}, \quad \frac{M\mu}{r_1^2}$$

(où λ et μ sont deux constantes positives de somme égale à 1). Sa variation de vitesse sera au plus égale à la somme des impulsions de ces deux forces. Donc sa vitesse V à l'instant τ satisfera à l'inégalité

$$(21) \qquad V < V_1' + \frac{m_2}{2k_2(1+\varepsilon_1)} \left[-\frac{d(R^2)}{dt} \right]_{t=t_1},$$

en désignant par V_1' la valeur de V à l'instant t_1'.

Cette limitation de la vitesse donne bien une limite inférieure pour le rayon vecteur ρ (et, par conséquent, aussi pour $R^2 \geq h\rho^2$). On a, en effet, évidemment,

$$(22) \qquad |\alpha| \leq \rho V.$$

Donc, à l'instant τ,

$$(23) \qquad \rho_\tau \leq \frac{\dfrac{a}{h} - \dfrac{g}{h} k_3 \sqrt{\chi}}{V_1' + \dfrac{m_2}{2k_2(1-\varepsilon_0)} \left[-\dfrac{d(R^2)}{dt} \right]_{t=t_1}},$$

ε_0 désignant le second membre de (19).

---

[1] Voir *A. M.*, formules (17), p. 110, les équations de son mouvement.

Il ressort déjà de là que R ne peut pas tendre vers zéro pour une valeur finie du temps.

5. Mais M. Sundman a été plus loin. Il a obtenu pour R, en fonction des seules données initiales, une limite inférieure valable si grand que soit t.

C'est à quoi nous arriverons aisément si la constante K des forces vives est négative. Car alors [d'après (17)], $\frac{d^2(R)^2}{dt^2}$ est toujours positif, de sorte que la question ne se pose pas (R étant croissant pendant tout le cours du mouvement), si la valeur initiale $(R^2)'_0$ de $\frac{d(R^2)}{dt}$ est positive et que, dans le cas contraire, $\frac{d(R^2)}{dt}$, lorsqu'il est négatif, est toujours inférieur en valeur absolue à $|(R^2)'_0|$. On peut alors prendre $t'_1 = t_1$ et évaluer V par le théorème des forces vives qui (r_0, r_1 et r_2 étant tous au moins égaux à $\varkappa$ pour $t = t_1$) donne, pour cet instant,

$$(24) \qquad V^2 \leqq V_1^2 = \frac{1}{h}\left(2\frac{N}{\varkappa} + |K|\right) \qquad \left(N = \frac{M}{m_0} + \frac{M}{m_1} + \frac{M}{m_2}\right)$$

et, par conséquent, finalement,

$$\rho_\tau \leqq \frac{\dfrac{a}{h} - \dfrac{g}{h} k_3 \sqrt{\varkappa}}{\sqrt{\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{2N}{\varkappa} + |K|\right) + \dfrac{m^2}{2k_2(1-\varepsilon_0)}|(R^2)'_0|}},$$

d'où une limite inférieure de

$$R^2 \geqq R_\tau^2 \geqq h\rho_\tau^2$$

et (pendant toute la période où $r < \varkappa$) une limite inférieure de ρ, savoir

$$(25) \qquad \rho > \sqrt{\frac{R^2}{g\dfrac{\varkappa}{k_2} + h}} > \rho_\tau \sqrt{\frac{h}{g\dfrac{\varkappa}{k_2} + h}},$$

en vertu de (17') et de (10').

6. Supposons, en second lieu, $K > 0$.

Désignons toujours par V_1^2 le dernier membre de (24), de sorte que, pour $t = t_1$, V est au plus égal à V_1.

Soit ρ_1 une valeur de ρ déterminée par la relation

$$(26) \qquad \rho_1^2 V_1^2 = 3\nu A^2, \qquad \text{d'où} \qquad \rho_1 = \sqrt{3\nu}\,\frac{A}{V_1},$$

A désignant le dernier membre de l'inégalité (16) et ν un nombre supérieur à l'unité.

I. Si ρ reste supérieur à ρ_1, notre conclusion est démontrée.

II. Supposons maintenant que, ρ décroissant jusqu'à la valeur ρ_1, V ait, au moment où cette valeur est atteinte, une valeur V_1' au plus égale à V_1. Prenons cet instant pour instant t_1'. Comme $\left|\frac{d\rho}{dt}\right| \leqq V$, on aura alors

$$\left|\rho\,\frac{d\rho}{dt}\right|_{t=t_1'} \leqq V_1\rho_1 = A\sqrt{3\nu}$$

et comme, d'après l'équation (5) des forces vives multipliée par $m_2 r^2$,

$$\left|r\,\frac{dr}{dt}\right|^2 \leqq r\left[2M + 2M\left(\frac{m_2 r}{m_0 r_0} + \frac{m_2 r}{m_1 r_1}\right) + |K| m_2 r\right] < k_4 r,$$

on aura aussi

$$(27) \qquad \left|\frac{d(R^2)}{dt}\right| \leqq gr\left|\frac{dr}{dt}\right| + h\rho\left|\frac{d\rho}{dt}\right| \leqq hA\sqrt{3\nu} + g\sqrt{k_4\varkappa},$$

d'où (à l'instant τ) pour V, toujours d'après l'inégalité (21),

$$(28) \qquad V < V_1 + \frac{m_2}{2k_2(1-\varepsilon_0)}\left(hA\sqrt{3\nu} + g\sqrt{k_4\varkappa}\right);$$

pour ρ_τ [d'après (23)],

$$(29) \qquad \rho_\tau > \frac{\dfrac{a}{h} - \dfrac{g}{h}k_3\sqrt{\varkappa}}{V_1 + \dfrac{m_2}{2k_2(1-\varepsilon_0)}\left(hA\sqrt{3\nu} + g\sqrt{k_4\varkappa}\right)}.$$

Dès lors la valeur de R^2 au même instant τ (valeur minima), ainsi que la valeur de ρ pour tout instant tel que $r < \varkappa$, sont limitées inférieurement par les inégalités

$$(30) \qquad R^2 \geqq h\rho_\tau^2$$

et (25).

Cette évaluation s'applique également au cas où, pour $t = t_1$, ρ est au plus égal à ρ_1 : on prendra alors $t'_1 = t_1$.

III. Supposons donc enfin que, au moment où ρ atteint en décroissant la valeur ρ_1 (et cela pour la première fois à partir de t_1), V soit supérieur à V_1. Nous prendrons encore cet instant pour instant t'_1, la valeur correspondante de V étant toujours désignée par V'_1.

Soit T_1 l'instant, antérieur à t'_1, où, pour la dernière fois, V a passé par la valeur V_1. Dans l'intervalle de temps (T_1, t'_1), le produit ρV est constamment supérieur à la limite $A\sqrt{3\nu}$ et, par suite, en vertu de l'identité

$$V^2 = \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\rho^2},$$

on a

$$\left|\frac{d\rho}{dt}\right| > V\sqrt{1 - \frac{1}{\nu}}; \tag{31}$$

d'où ressort, tout d'abord, que $\frac{d\rho}{dt}$ ne s'annule pas, et, par conséquent (puisque ρ a décru de $t = T_1$ à $t = t'_1$) qu'il est constamment négatif.

Dans cet intervalle de temps (T_1, t'_1), nous appliquerons le théorème des forces vives au mouvement du point (ξ, η, ζ). La force qui agit sur ce point (considéré comme de masse 1) a [1] pour composantes

$$\begin{aligned} &-M\xi\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + \lambda\mu M x\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right), \\ &-M\eta\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + \lambda\mu M y\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right), \\ &-M\zeta\left(\frac{\lambda}{r_0^3} + \frac{\mu}{r_1^3}\right) + \lambda\mu M z\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right). \end{aligned} \tag{32}$$

Si nous réduisions celles-ci aux termes qui contiennent respectivement ξ, η, ζ en facteurs et si, en même temps, nous remplacions les dénominateurs r_0^3 et r_1^3 par ρ^3, le travail élémentaire de cette

---

[1] *Voir* toujours les équations (17), *A. M.*, p. 110.

force serait (en vertu de $\lambda + \mu = 1$)

$$(33) \qquad -M\frac{\xi\, d\xi + \eta\, d\eta + \zeta\, d\zeta}{\rho^3} = -M\frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Cela reviendrait à considérer les attractions newtoniennes qui s'exercent sur le point (ξ, η, ζ) comme émanées de l'origine des coordonnées.

Les considérations précédentes vont nous montrer aisément que l'erreur ainsi commise est négligeable.

En premier lieu, la substitution de r_0^3, r_1^3 à ρ^3 aux dénominateurs revient à multiplier l'expression précédente par un facteur compris entre

$$\left(\frac{\rho}{r_0}\right)^3 \quad \text{et} \quad \left(\frac{\rho}{r_1}\right)^3,$$

c'est-à-dire [d'après les inégalités (10')] entre

$$\left(1 - \sqrt{\frac{\varkappa}{k_2}}\right)^3 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{1 - \sqrt{\frac{\varkappa}{k_2}}}\right)^3.$$

Quant aux termes en x, y, z, ils donnent le travail élémentaire

$$(34) \qquad M\lambda\mu\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)(x\, d\xi + y\, d\eta + z\, d\zeta).$$

Or

$$\left| x\frac{d\xi}{dt} + y\frac{d\eta}{dt} + z\frac{d\zeta}{dt} \right|$$

est inférieur à rV, c'est-à-dire, en vertu de (31), à

$$\varkappa\sqrt{\frac{\nu}{\nu - 1}}\left|\frac{dz}{dt}\right|.$$

Comme la différence $\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r_1^3}$ est inférieure en valeur absolue au plus grand de ses deux termes, c'est-à-dire à

$$\frac{1}{\left(1 - \sqrt{\frac{\varkappa}{k_2}}\right)^3}\frac{1}{\rho^3},$$

on a ainsi une limite supérieure du travail de la force (32) et, par

conséquent, une limite supérieure pour $V_1'^2$, savoir

$$(35)\qquad V_1'^2 < V_1^2 + 2M \frac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{\varkappa}{k_2}}\right)^3} \int_{T_1}^{t_1} \frac{-d\rho}{\rho^2}$$

$$+ 2M\lambda\mu \frac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{\varkappa}{k_2}}\right)^3} \varkappa \sqrt{\frac{\nu}{\nu-1}} \int_{T_1}^{t_1} \frac{-d\rho}{\rho^3}$$

$$< V_1^2 + 2M \frac{k_5}{\rho_1} + M\lambda\mu \sqrt{\frac{\nu}{\nu-1}}\, k_5 \frac{\varkappa}{\rho_2^1};$$

$$k_5 = \frac{1}{\left(1-\sqrt{\frac{\varkappa}{k_2}}\right)^3}.$$

Les limitations (25) à (30) resteront donc encore valables, dans ce dernier cas, à condition d'y remplacer V_1 par la quantité V_1' obtenue en extrayant la racine carrée du dernier membre de l'inégalité précédente.

Nous avons, en un mot, obtenu la limite inférieure demandée pour la valeur minima de R^2, savoir la quantité (30) dans laquelle ρ_τ est donné par (29), V_1 étant remplacé par la quantité V_1' donnée par (35) et où ρ_1 est défini [1] par (26); ou plus exactement (à cause de la possibilité de l'hypothèse I) la plus petite des limites (30) et

$$R'^2 = h\rho_1^2.$$

Quant à ρ (s'il n'est pas constamment supérieur à ρ_1), il sera supérieur à la limite (25).

De plus, nous avons du même coup (ainsi que cela est nécessaire pour le développement de la méthode de M. Sundman) une limite supérieure de V, à savoir la limite (28) (V_1 étant toujours remplacé par V_1'). C'est ce que les raisonnements précédents nous montrent bien [2] dans l'hypothèse (III).

---

[1] Dans (26) il est entendu que V_1 ne doit pas être remplacé par V_1'.

[2] Les raisonnements précédents ne concernent, il est vrai, que les instants antérieurs à τ. Mais, pour les appliquer à $t < \tau$, il suffit de se servir de la réversibilité des équations du mouvement (changement de t en $-t$ dans ses équations) et de faire jouer le rôle de t_1 à l'instant t_2 où r *cesse* d'être inférieur à $\varkappa$.

Dans l'hypothèse (I), on arrive à la même conclusion en appliquant la même méthode à tous les intervalles de temps (s'il en existe) dans lesquels V est supérieur à V_1. On opérera de même dans l'hypothèse (II) si V (avant de prendre la valeur $V'_1 < V_1$) prend des valeurs supérieures à V_1.

Quant à $\varkappa$, il désigne, dans les formules précédentes, une quantité positive vérifiant les inégalités [1]

$$(8'') \qquad 0 < \varkappa < k'_1, \qquad |K| \frac{k'^2_1}{3} + \frac{2M}{m} k'_1 - M \frac{a^2}{27} = 0,$$

$$(13'')\,[2] \qquad \frac{k'_2}{2} - \varkappa - \sqrt{k'_2 \varkappa} > 0, \qquad k'_2 = \frac{M}{m} \frac{k'_1}{2},$$

$$(15'') \qquad 2M\varkappa \left[1 + \frac{2M}{m} \sqrt{\frac{\varkappa}{k'_2}} + \frac{|K|}{2} \varkappa \right] < \frac{a^2}{g^2},$$

$$(19'') \qquad \frac{2M}{m} \sqrt{\frac{\varkappa}{k'_2}} + \frac{|K|}{2} \varkappa < 1.$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Proceedings of the fifth international Congress of Mathematicians (Cambridge, 22–28 August 1912). Edited by general Secretaries of the Congress E. W. Hobson and A. E. H. Love. Vol. I, gr. in-8, 500 pages; Vol. II, gr. in-8, 657 pages. Cambridge at the University Press, London : E.-C. Fetter Lane : 1913. Price : 30 sh. (two Volumes).

---

[1] Les changements par lesquels les inégalités (8''), (13''), (15''), (19'') diffèrent respectivement des inégalités (8'), (13'), (15'), (19') sont ceux qu'il convient de faire subir à ces dernières pour qu'elles soient vérifiées même si l'on intervertit l'ordre des trois points, c'est-à-dire si r désigne r_0 ou r_1 au lieu de désigner r_2, etc.

[2] Cette inégalité (13'') dispense de (13).

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VOLTERRA (Vito). — The Theory of permutable Functions. Lectures delivered at Princeton University; October 1912. (Louis Clark Vanuxem Foundation.) 1 vol. in-8, II-66 pages, Princeton, University Press; London, Humphrey Milford; Oxford, University Press; April 1915.

On trouvera dans ce Livre une exposition systématique des travaux essentiels de M. Volterra sur la théorie des fonctions permutables. Ces recherches, qui ont fondé la théorie, ont déjà été exposées, avec plus de développement, dans les *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles* (1) et dans les *Leçons sur les fonctions de lignes* (2) du même Auteur. Ces deux Volumes ont été analysés en détail dans le *Bulletin* (3), aussi insisterai-je surtout sur les points qui n'avaient pas été traités dans les deux précédents Livres.

Dans une première Conférence, M. Volterra introduit la notion de composition et de permutabilité de deux substitutions. Il en déduit, par le passage à la limite du calcul intégral, dont il a fait par ailleurs un emploi si fécond dans toute sa *théorie des fonctions de lignes*, la notion de composition de deux fonctions de deux variables. Si les substitutions initiales sont quelconques, il obtient ainsi la composition de deuxième espèce, exprimant l'opération

$$\int_a^b f(x, \xi)\varphi(\xi, y)\,d\xi = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi};$$

si au contraire tous les éléments situés d'un côté de la diagonale principale sont nuls, il obtient la composition de première espèce

$$\int_x^y f(x, \xi)\varphi(\xi, y)\,d\xi = \overset{*}{f}\overset{*}{\varphi}.$$

Une notation analogue à celle d'un produit étant ainsi adoptée

(1) Paris, Gauthier-Villars, 1913, p. 147 à 162.
(2) Paris, Gauthier-Villars, 1913, Chap. XI, XII, XIII.
(3) T. XXXVII, p. 289; t. XXXVIII, p. 161.

pour cette opération, il y aura intérêt à considérer les fonctions dites *permutables*, pour lesquelles cette opération est commutative

$$f\varphi = \varphi f.$$

Après avoir déterminé les fonctions permutables de première espèce avec l'unité, l'Auteur étudie la convergence des séries de fonctions permutables. Je rappelle les résultats auxquels il arrive. Prenons, pour fixer les idées, une seule variable z et soit la série *convergente*

$$(1) \qquad \sum_0^\infty {}_n\, a_n z^n.$$

Remplaçons-y z par $zf(x, y)$ et considérons les puissances de f comme exprimant des compositions. Nous obtenons la série

$$(2) \qquad \Sigma a_n z^n f^n,$$

qui converge autour de $z = 0$ et représente une fonction de x et y permutable avec f. C'est de plus une fonction de z toujours *entière* s'il s'agit de permutabilité de première espèce, *entière* ou *méromorphe* en même temps que la fonction (1) s'il s'agit de permutabilité de deuxième espèce.

Au début de la deuxième Conférence, l'Auteur démontre l'élégant résultat sur la résolution des équations intégrales qui fait l'intérêt principal de la composition et de la permutabilité : à toute équation implicite ayant une solution analytique il fait correspondre, par simple remplacement des variables par des fonctions permutables, une équation intégrale dont on connaît une solution. Il envisage le cas particulier de l'équation intégrale linéaire de deuxième espèce et ramène à ce cas l'équation intégrale de Volterra de première espèce

$$(3) \qquad \overset{*}{F}\overset{*}{X} = \overset{*}{\Psi},$$

par rapport à l'inconnue $X(x, y)$. Il passe ensuite à l'équation

$$(4) \qquad \overset{*}{F}\overset{*}{X} + \overset{*}{X}\overset{*}{F}_1 = \overset{*}{\Psi}$$

et montre, dans le cas particulier où F et F_1 sont du premier ordre, comment sa résolution se ramène à celle d'une équation

intégro-différentielle. Sans insister sur le traitement de cette dernière équation, il indique comment deux circonstances peuvent se présenter : suivant que $F(x, x) + F_1(x, x)$ est identiquement nul ou non, l'équation (4) a une infinité ou une seule solution. C'est une subdivision importante, car on la retrouve dans les équations les plus générales formées par des compositions de première espèce.

M. Volterra envisage, dans sa troisième Conférence, l'équation

$$\overset{*}{F}\overset{*}{X} - \overset{*}{X}\overset{*}{F} = 0$$

dont dépend la recherche des fonctions permutables de première espèce avec F. Il suppose F du premier ordre et démontre la relation

$$\frac{X(x, x)}{F(x, x)} = \text{const.}$$

Il indique comment elle permet probablement d'obtenir, dans certains cas, un développement

$$X = c_1 F + c_2 \overset{*}{F}{}^2 + \ldots + c_n \overset{*}{F}{}^n + \ldots.$$

L'étude de la convergence et de la validité de ces développements et d'autres plus généraux a été effectuée depuis.

La résolution de l'équation (3) permet de définir le symbole $\overset{*}{F}{}^{-1}$ et d'introduire, dans la théorie des fonctions permutables, des fractions symboliques : elles sont soumises, comme le montre M. Volterra, aux règles de calcul des fractions ordinaires.

L'Auteur termine par une nouvelle application, à la résolution d'équations intégrales, de la notion de permutabilité. Ce résultat est en somme déduit de celui de la deuxième Conférence par une nouvelle application du *passage à la limite du calcul intégral*. Au lieu de partir d'un système d'équations implicites ordinaires, il part de l'équation implicite fonctionnelle

$$\Phi(\xi) = f(\xi) + \int_a^b f(x_1) F_1(x_1; \xi)\, dx_1$$
$$+ \int_a^b \int_a^b f(x_1) f(x_2) F_2(x_1, x_2; \xi)\, dx_1\, dx_2 + \ldots,$$

qui admet, sous certaines conditions, une solution en $f(\xi)$ pourvu que $|\Phi(\xi)|$ soit assez petit. En y remplaçant $\Phi(\xi)$ par une famille de fonctions permutables $\Phi(x, y; \xi)$, $f(\xi)$ par $f(x, y; \xi)$, $f(x_1)f(x_2)$ par $\overset{*}{f}(x, y; x_1)\overset{*}{f}(x, y; x_2)$, ..., on obtient une équation intégrale toujours résoluble en $f(x, y; \xi)$.

Ce résultat montre, une fois de plus, la puissance et l'élégante simplicité des méthodes introduites dans la Science par M. Volterra.

JOSEPH PÉRÈS.

HILTON (HAROLD). — HOMOGENEOUS LINEAR SUBSTITUTIONS. 1 vol. in-8, VIII + 9 + 184 pages. Oxford, at the Clarendon Press; 1914.

Ce Livre est consacré à la théorie des substitutions linéaires et homogènes et principalement à cette partie de la théorie où interviennent ces expressions appelées *diviseurs élémentaires* (en anglais *invariant-factors*), introduites par Weierstrass, et qui jouent un rôle fondamental dans la classification et l'étude des substitutions linéaires. L'Auteur a limité son sujet en laissant systématiquement de côté tout ce qui touche à la théorie des groupes de substitutions.

Dans les Mémoires classiques relatifs aux diviseurs élémentaires ainsi que dans les divers exposés qui ont été faits sur ce sujet [1], les diviseurs élémentaires ont été introduits à propos de la théorie des faisceaux de formes *bilinéaires* et le rôle joué par ces mêmes expressions dans la théorie des substitutions linéaires résultait de là : les deux théories sont en effet liées étroitement l'une à l'autre et les problèmes de classification, de réduction à des formes canoniques relatifs aux substitutions linéaires peuvent résulter comme cas particuliers des problèmes analogues relatifs aux faisceaux de formes bilinéaires : c'est le point de vue classique. Dans le Livre de M. Harold Hilton, au contraire, ce sont les substitutions

---

[1] *Voir*, par exemple, MUTH, *Theorie und Anwendung der Elementartheiler* (Teubner, 1899);

SAUVAGE, *Théorie générale des systèmes d'équations différentielles linéaires et homogènes* (*Annales de Toulouse*, t. VIII et IX);

Encyclopédie des Sciences mathématiques (Article de M. J. DRACH, *Sur la théorie des formes et des invariants*, t. I, 2e vol.).

linéaires qu'on trouve au premier plan; leurs propriétés y sont traitées directement et elles sont utilisées pour édifier ensuite la théorie des formes bilinéaires ou quadratiques qui est également traitée dans ses parties essentielles. Au point de vue didactique, cette façon de procéder paraît présenter quelques avantages, car la notion de substitution linéaire est, sinon plus simple que celle de forme bilinéaire, du moins plus familière à la plupart des lecteurs qui abordent pour la première fois l'étude approfondie de ces divers sujets, en réalité inséparables.

La méthode d'exposition de M. Harold Hilton est celle qu'il avait déjà employée dans son Ouvrage antérieur *An introduction to the Theory of groups of finite order* ([1]). Les divers Chapitres sont divisés en sections, très courtes en général, et chaque section se termine par de nombreux exercices; l'Ouvrage en contient plus de 300; certains sont de simples exemples numériques destinés à préciser ou à faire comprendre le sens des propositions; d'autres mettent en évidence des rapprochements avec d'autres théories; d'autres enfin servent à dégager le texte de tout ce qui est accessoire, à donner de nouvelles méthodes ou à traiter des cas exceptionnels; des indications succinctes des solutions et l'énoncé des résultats facilitent le travail du lecteur. Le Livre prend ainsi un aspect scolaire qui étonne au premier abord; car, d'après la nature même du sujet traité, il est destiné à des lecteurs d'une culture mathématique assez étendue pour qu'il ne soit pas indispensable de donner une direction aussi minutieuse à leur travail personnel. Mais, d'autre part, pourquoi les méthodes pédagogiques qui réussissent dans les études les plus élémentaires ne donneraient-elles pas de bons résultats à tous les degrés de l'enseignement? C'est ce qu'ont compris, avant M. Hilton, d'autres auteurs anglais dont les procédés pédagogiques sont les mêmes que les siens : parmi les Ouvrages les plus typiques, rédigés dans cet ordre d'idées, il suffira de citer les Livres de Salmon, ou ceux de Routh, auxquels on ne peut s'empêcher de songer à propos de la méthode d'enseignement de M. Hilton. D'ailleurs, il y a peut-être dans cette méthode autre chose qu'un souci pédagogique : il me semble que

---

([1]) Oxford, Clarendon Press, 1908. Analysé dans le *Bulletin*, t. XXXII, 1908, p. 338.

M. Hilton tient à nous faire assister à l'élaboration même du sujet tel qu'il s'est développé dans son esprit; les nombreux exemples qu'il nous donne sont sans doute ceux qu'il a traités pour son édification personnelle au cours de la lecture des Mémoires originaux: au lieu de nous cacher le travail intime de sa pensée, comme le font beaucoup trop d'auteurs, il nous le livre entièrement sous la forme de ces innombrables exercices qui nous montrent les diverses faces du sujet, et cela rend la lecture de l'Ouvrage particulièrement facile et agréable.

Une pareille méthode d'exposition ne comporte guère une Bibliographie étendue et c'est ce qui explique peut-être que, dans ce Livre consacré aux substitutions linéaires et aux formes bilinéaires, on ne trouve cités nulle part les noms des créateurs de la théorie. En réalité, M. Harold Hilton a synthétisé dans son Livre un grand nombre de Mémoires originaux, mais il nous les donne dans un cadre tout à fait personnel, avec des démonstrations souvent nouvelles et le Livre prend ainsi une unité et une originalité qu'on n'y trouverait sans doute pas si l'Auteur avait exposé la théorie dans l'ordre historique, en suivant pas à pas et en résumant les Mémoires originaux. Au surplus, il ne manque pas d'ouvrages où le lecteur peut trouver, s'il le désire, une Bibliographie complète et M. Harold Hilton en indique lui-même quelques-uns dans la Préface de son Livre.

Le Livre est divisé en neuf Chapitres, dont les trois premiers constituent une première étude contenant les parties de la théorie nécessaires pour pouvoir traiter les applications d'Analyse, de Géométrie et de Mécanique auxquelles est consacré le Chapitre IV. Les cinq derniers Chapitres sont de nouveau consacrés à la théorie générale. Indiquons succinctement la matière de ces divers Chapitres.

Le Chapitre I contient les propriétés fondamentales des substitutions linéaires et leur réduction à la forme canonique classique (forme de M. Jordan). Les substitutions envisagées sont en général, et sauf indication contraire, à déterminant non nul. On définit d'abord le produit de plusieurs substitutions, l'inverse, les puissances d'une substitution, puis la substitution A' *transposée* d'une substitution A (substitution dont la matrice se déduit de celle de A par échange des lignes et des colonnes), la substitu-

tion $\overline{A}$ *conjuguée* de A (dont la matrice se déduit de celle de A en remplaçant chaque élément a_{ij} par l'élément imaginaire conjuguée $\overline{a_{ij}}$), enfin la *transformée* $S^{-1}AS$ d'une substitution A par une substitution S.

On définit ensuite les pôles d'une substitution A à m variables : un pôle est un point de coordonnées homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_m$ demeurant invariant par la substitution. La recherche des pôles conduit au déterminant caractéristique et à l'*équation caractéristique* de la substitution

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

où les a_{ij} sont les coefficients de la substitution.

Toutes les transformées $S^{-1}AS$ de A ont le même déterminant caractéristique que A. Il en résulte qu'un pôle de A est transformé par S en un pôle de $S^{-1}AS$. C'est de là que part l'Auteur pour obtenir la forme canonique de la substitution, forme obtenue par la juxtaposition de plusieurs groupes d'équations analogues au suivant :

$$x'_1 = \alpha x_1 + x_2, \qquad x'_2 = \alpha x_2 + x_3, \qquad \ldots,$$
$$x'_{m-1} = \alpha x_{m-1} + x_m, \qquad x'_m = \alpha x_m.$$

On appelle *produit direct* de plusieurs substitutions portant sur des variables différentes, la substitution obtenue en considérant l'ensemble des substitutions données : la forme canonique est donc le produit direct de plusieurs substitutions analogues à celle que nous venons d'écrire.

Cela posé, on peut d'abord choisir S de façon que $S^{-1}AS$ admette pour pôle le point $(1, 0, 0, \ldots, 0)$: la substitution transformée est alors de la forme

$$(1) \qquad x'_1 = r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \ldots + r_{1m}x_m,$$

$$(2) \qquad x'_t = r_{t2}x_2 + \ldots + r_{tm}x_m \qquad (t = 2, 3, \ldots, m).$$

Si l'on suppose alors que la substitution à $m-1$ variables, définie par les équations (2), puisse prendre la forme canonique,

on en déduit aisément qu'il en est de même de la substitution donnée. Le théorème étant vrai pour $m = 1$ est donc général.

L'Auteur donne ensuite les définitions des substitutions symétriques $(a_{ij} = a_{ji})$, alternées $(a_{ij} = -a_{ji})$, hermitiennes $(a_{ij} = \overline{a_{ji}})$, orthogonales $(AA' = E)$, unitaires $(A\overline{A'} = E)$. Dans ces définitions, A désigne la substitution donnée et E la substitution identique. Entre les transformées de ces diverses substitutions les unes par les autres existent certaines relations qui sont étudiées en détail.

L'étude des substitutions hermitiennes conduit à ce théorème fondamental, démontré très simplement et de deux façons différentes par l'Auteur : *les racines caractéristiques* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ *d'une substitution hermitienne* A *sont toutes réelles et la substitution peut être transformée par une substitution unitaire en une multiplication*

$$x'_1 = \lambda_1 x_1, \qquad x'_2 = \lambda_2 x_2, \qquad \ldots, \qquad x'_n = \lambda_n x_n.$$

En particulier, si A est une substitution hermitienne réelle, c'est-à-dire une substitution symétrique réelle, on obtient ainsi le théorème d'après lequel les racines de l'équation caractéristique d'une pareille substitution (équation en S des Traités de Géométrie analytique) sont toutes réelles; de plus, la substitution peut être transformée en une multiplication par une substitution orthogonale réelle. Une autre conséquence est relative aux substitutions alternées réelles : *les racines caractéristiques d'une substitution alternée réelle sont toutes des imaginaires pures.*

Enfin, le Chapitre se termine par l'étude des substitutions réelles orthogonales : l'Auteur démontre que toute substitution orthogonale réelle à un nombre quelconque de variables peut être transformée en produit direct de substitutions de l'un des trois types

$$x' = x, \qquad x' = -x, \qquad \begin{aligned} x' &= x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' &= x\sin\theta + y\cos\theta. \end{aligned}$$

Le Chapitre II est consacré à la théorie des *Invariant-Factors*, connus en France sous le nom de *diviseurs élémentaires*. L'Auteur les définit d'abord pour un déterminant dont les éléments sont du premier degré en λ : leur définition est la définition clas-

sique bien connue que nous ne reproduirons pas ici. Le déterminant considéré peut être considéré comme le déterminant d'une substitution $A - \lambda B$, où A et B sont deux substitutions linéaires données. La propriété fondamentale des diviseurs élémentaires est la suivante :

Si P et Q sont deux substitutions linéaires quelconques et si l'on pose

$$PAQ = C, \qquad PBQ = D,$$

les deux substitutions $A - \lambda B$ et $C - \lambda D$ ont les mêmes diviseurs élémentaires.

On appelle *diviseurs élémentaires d'une substitution linéaire* les diviseurs élémentaires de son déterminant caractéristique. L'Auteur détermine d'abord les diviseurs élémentaires de la substitution canonique obtenue au Chapitre I et l'on voit alors immédiatement : 1° que la substitution canonique est complètement déterminée lorsque l'on connaît les diviseurs élémentaires de la substitution donnée; 2° que la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions A et B puissent être transformées l'une dans l'autre est qu'elles aient les mêmes diviseurs élémentaires.

L'Auteur indique ensuite un deuxième type de substitution qu'on peut prendre aussi pour type canonique; ce type que j'ai indiqué dans une Note des *Comptes rendus* (1912, p. 1482) est le *produit direct* de plusieurs substitutions de la forme

$$x'_1 = x_2, \qquad x'_2 = x_3, \qquad \ldots, \qquad x'_{r-1} = x_r,$$
$$x'_r = e_1 x_1 + e_2 x_2 + \ldots + e_r x_r,$$

chacun des polynomes

$$\lambda^r - e_1 - e_2 \lambda - \ldots - e_r \lambda^{r-1}$$

étant divisible par le suivant : les coefficients qui figurent dans cette substitution sont complètement déterminés lorsque l'on connaît les diviseurs élémentaires [1]. L'Auteur se sert de cette nouvelle forme canonique pour déterminer les substitutions transformables en leurs inverses.

---

[1] Un Mémoire détaillé relatif à cette forme canonique nouvelle est à l'impression dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

Le Chapitre III est relatif aux formes bilinéaires. A toute substitution linéaire déterminée par le tableau de ses coefficients a_{ij}, on peut faire correspondre la forme bilinéaire

$$a(x, y) = \Sigma a_{ij} y_i x_j,$$

et réciproquement à toute forme bilinéaire correspond une substitution linéaire. Au produit AB de deux substitutions linéaires A et B correspondra une forme bilinéaire qui sera dite *le produit de deux formes* $a(x, y)$ et $b(x, y)$ qui correspondent respectivement à A et à B. Si l'on fait subir aux variables x_j une substitution linéaire P qui remplace les x_j par de nouvelles variables $\mathbf{x}_t$ et aux variables y_i une substitution linéaire Q qui remplace les y_i par de nouvelles variables $\mathbf{y}_s$, la forme bilinéaire $a(x, y)$ devient une forme bilinéaire $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ par rapport aux nouvelles variables $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{y}_s$. On démontre que *la substitution* B *qui correspond à cette nouvelle forme est donnée par le produit*

$$\mathrm{B} = \mathrm{PAQ}'.$$

Si $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$, on a une transformation *congruente* des variables x et y. De cette proposition fondamentale et des résultats du Chapitre II, il résulte que, si l'on effectue les mêmes substitutions P et Q dans deux formes bilinéaires $a(x, y)$ et $b(x, y)$ qui sont ainsi transformées respectivement en $c(x, y)$ et $d(x, y)$, les deux déterminants de $a(x, y) - \lambda b(x, y)$ et de $c(x, y) - \lambda d(x, y)$ ont les mêmes diviseurs élémentaires.

Si l'on suppose $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ et si l'on pose $y_i = \overline{x_i}$, la forme bilinéaire $a(x, y)$ devient la *forme hermitienne* $a(x, \overline{x})$. Les résultats du Chapitre I relatifs aux substitutions hermitiennes permettent alors de démontrer que toute forme hermitienne peut être ramenée, par un changement de variables unitaire, au type canonique

$$\lambda_1 x_1 \overline{x_1} + \lambda_2 x_2 \overline{x_2} + \ldots + \lambda_r x_r \overline{x_r},$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ désignent les racines *non nulles* de l'équation caractéristique : si celle-ci a $m - r$ racines nulles, la forme hermitienne est dite *de rang* r.

Comme cas particulier, si les coefficients de la forme hermitienne sont réels ainsi que les variables x_i, on obtient une forme

quadratique et l'on voit que toute forme quadratique de rang r peut être ramenée par une substitution orthogonale au type

$$\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_r x_r^2.$$

Revenant aux formes bilinéaires, on démontre que toute forme bilinéaire $a(x, y)$ dont le déterminant est de rang r peut être ramenée au type canonique

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_r y_r.$$

Si la forme $a(x, y)$ est symétrique, ce type peut être obtenu par une transformation *congruente* des variables x et y et si l'on suppose $x_i = y_i$, on obtient la décomposition d'une forme quadratique en une somme de carrés : la méthode employée par l'Auteur coïncide alors avec la méthode de réduction de Gauss.

Si la forme $a(x, y)$ est alternée, elle peut être ramenée, par une transformation congruente des variables x, y, au type

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \ldots.$$

L'Auteur étudie ensuite la forme *adjointe* d'une forme bilinéaire ou d'une forme quadratique.

La fin du Chapitre est consacrée de nouveau aux substitutions linéaires. On définit la somme de plusieurs substitutions linéaires en passant par l'intermédiaire des formes bilinéaires qui leur correspondent. L'Auteur établit très simplement la relation fondamentale

$$p_0 A^r + p_1 A^{r-1} + \ldots + p_r A_0 = 0$$

qui existe entre les puissances successives d'une substitution linéaire; les coefficients de cette relation dépendent uniquement des diviseurs élémentaires.

Le Chapitre IV est consacré aux applications. Il nous suffira d'indiquer les sujets traités qui sont empruntés aux domaines les plus variés : intégration d'un système différentiel linéaire à coefficients constants; résolution d'un système d'équations algébriques linéaires et homogènes; transformations projectives du plan ou de l'espace et, en particulier, déplacements géométriques; résolution de l'équation du quatrième degré; maxima et minima des fonctions de plusieurs variables; classification des quadriques; relations

mutuelles de position entre deux coniques ou entre deux quadriques (discussion très complète et classification des divers cas d'après la nature des diviseurs élémentaires); petites oscillations autour d'une position d'équilibre; théorèmes de Thomson et de Bertrand relatifs à l'énergie cinétique d'un système.

Dans le Chapitre V, M. Hilton détermine toutes les substitutions permutables avec une substitution donnée A; à cet effet, il traite d'abord le cas où A est une substitution canonique et il montre comment on en déduit le cas général.

Dans le Chapitre VI, l'Auteur revient aux substitutions symétriques, alternées ou hermitiennes.

Relativement aux substitutions symétriques, signalons les propositions suivantes : Toute substitution symétrique peut être mise sous la forme BB'. Toute substitution peut être mise sous la forme du produit de deux substitutions symétriques.

L'Auteur donne aussi les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une substitution quelconque puisse se mettre sous la forme du produit de deux substitutions alternées, ou du produit d'une substitution alternée par une substitution symétrique ou enfin du produit de deux substitutions hermitiennes. Dans toutes ces conditions intervient uniquement la forme des diviseurs élémentaires de la substitution.

Le Chapitre VII est relatif aux invariants du second degré des substitutions linéaires. Pour déterminer tous ces invariants, il suffit de savoir traiter le même problème pour une substitution du type canonique : c'est ce que fait l'Auteur. Il détermine par la même méthode les invariants hermitiens qu'il y a lieu de considérer à côté des invariants quadratiques.

Le Chapitre VIII est consacré aux substitutions orthogonales. M. Harold Hilton donne d'abord les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une substitution quelconque puisse être transformée en une substitution orthogonale; ici encore, ce qui intervient uniquement, c'est la forme que doivent avoir les diviseurs élémentaires d'une pareille substitution. Deux substitutions orthogonales ayant les mêmes diviseurs élémentaires peuvent être transformées l'une dans l'autre par une substitution orthogonale. A côté des substitutions orthogonales qui admettent l'invariant

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2,$$

il y a lieu de considérer les substitutions admettant l'invariant hermitien

$$x_1\overline{x_1}+\ldots+x_k\overline{x_k}-x_{k+1}\overline{x_{k+1}}-\ldots-x_m\overline{x_m}.$$

Des problèmes analogues aux précédents sont traités pour ces substitutions.

Avec le Chapitre IX, M. Hilton revient aux formes bilinéaires pour étudier les faisceaux de pareilles formes, c'est-à-dire les formes bilinéaires $a(x, y)-\lambda b(x, y)$ où $a(x, y)$ et $b(x, y)$ sont des formes bilinéaires données. Il donne les formes canoniques d'un pareil faisceau et il examine le cas particulier des faisceaux de formes quadratiques. Le cas des faisceaux singuliers, c'est-à-dire des faisceaux dont le déterminant caractéristique est identiquement nul, est laissé de côté.

S. Lattès.

BERZOLARI (Luiz). — Geometria analitica : II. *Curve e Superficie del secondo ordine.* In-16, con 19 incisioni, XI-427 pages. Milan. Ulrico Hoepli, 1916.

Ce petit Volume, qui fait partie de la Collection des 1500 Manuels Hoepli, fait suite à celui dont nous avons rendu compte ici même, dans le numéro de janvier 1911. Ce Volume contenait la théorie des différents systèmes de coordonnées avec les principales applications à la théorie des courbes et des surfaces et à la projectivité.

La seconde Partie, dont nous avons aujourd'hui à rendre compte, est consacrée à l'étude méthodique des courbes et des surfaces du second ordre faite en partant de l'équation générale du second degré à deux et à trois variables.

Comme déjà dans la première Partie, l'Auteur a su condenser dans un petit espace une notable quantité de matière et il nous fait connaître avec toute l'ampleur nécessaire les plus importantes propriétés graphiques et métriques de ces courbes et de ces surfaces : en particulier la théorie des pôles et des polaires, la génération projective des coniques et des quadriques, leurs propriétés diamétrales et focales, leur classification métrique.

Parmi les Chapitres qui se distinguent par leur nouveauté, nous signalerons plus particulièrement ceux qui concernent la repré-

sentation paramétrique des coniques, les sections circulaires et les propriétés focales des quadriques.

Comme on devait l'attendre de M. Berzolari, son Ouvrage est écrit avec beaucoup d'ordre et de clarté.

Nous reproduisons en terminant les principaux articles de la Table des matières qui achèveront de donner une idée précise du contenu de l'Ouvrage.

Première Partie : *Les courbes du second ordre.* — Chap. I : Détermination d'une conique par points. — Chap. II : Polarité déterminée d'une conique. — Chap. III : Génération projective des coniques. Les coniques considérées comme courbes unicursales. — Chap. IV : Faisceaux ponctuels et tangentiels de coniques. — Chap. V : Propriétés diamétrales des coniques. — Chap. VI : Formes réduites des équations des coniques. — Chap. VII : Propriétés métriques des coniques étudiées sur leurs équations normales. — Chap. VIII. Propriétés focales des coniques.

Seconde Partie : *Les surfaces du second ordre.* — Chap. IX : Polaire déterminée d'une quadrique. — Chap. X : Quadriques réglées. — Chap. XI : Faisceaux ponctuels et tangentiels des quadriques. — Chap. XII : Propriétés diamétrales. — Chap. XIII : Formes réduites des équations des quadriques. — Chap. XIV : Forme et propriétés métriques des quadriques étudiées sur leurs équations normales. — Chap. XV : Sections circulaires d'une quadrique. — Chap. XVI : Propriétés focales des quadriques.

G. D.

BELL (Herbert). — A Course in the solution of Spherical Triangles, *for the mathematical Laboratory.* (Edinburgh mathematical Tracts, n° 5.) 1 vol. in-8, VIII-66 pages. London, G. Bell and Sons, 1915.

Ce petit Livre est destiné, ainsi que cela est indiqué dans son titre, à fournir des sujets de travaux pratiques aux étudiants qui fréquentent un Laboratoire de Mathématiques. En dehors de l'intérêt propre que présente la résolution des triangles sphériques pour l'Astronomie et la Navigation, l'Auteur pense que cette résolution peut constituer un exercice profitable à tous les étudiants

en Mathématiques. Le fait est que M. Bell a réussi à introduire de l'intérêt et de la variété dans cette science un peu aride et monotone qu'est la Trigonométrie sphérique, et, sous la forme adoptée par lui, on ne peut se refuser à accorder une valeur éducative à la résolution des triangles sphériques. M. Bell s'attache surtout à varier les méthodes de résolution, les unes numériques, les autres graphiques, à apprécier le degré de précision que chacune d'elles permet d'atteindre, à effectuer des vérifications en appliquant ces diverses méthodes à un même problème ou en contrôlant les résultats à l'aide des nombreuses formules que fournit la Trigonométrie sphérique.

Après un premier Chapitre relatif à l'usage des Tables de logarithmes et à l'emploi des logarithmes d'addition et de soustraction, on aborde avec le Chapitre II l'étude des triangles sphériques. Les formules fondamentales

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} \tag{1}$$

et

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \tag{2}$$

sont établies par des considérations géométriques et à l'aide de formules de Trigonométrie plane. L'Auteur a sans doute adopté cette méthode directe de démonstration parce qu'elle n'exige que des connaissances tout à fait élémentaires, et c'est ce qui explique probablement qu'on ne trouve pas dans son Livre la démonstration classique si simple de la formule (2) qui résulte de la définition du produit scalaire (ou produit intérieur) de deux vecteurs et des propriétés les plus élémentaires de ce produit; pour les formules (1), le calcul vectoriel fournit également une démonstration, mais il faut alors introduire le produit vectoriel (ou produit extérieur) de deux vecteurs, et le mieux était certainement de s'en tenir ici à la démonstration élémentaire adoptée par l'Auteur.

M. Bell démontre ensuite les divers autres groupes classiques de formules; il les déduit des formules (1) et (2) par des transformations algébriques et des éliminations. Les diverses formules fondamentales une fois établies, il constate qu'elles demeurent les mêmes dans leur ensemble lorsqu'on leur applique la *substitution polaire*, qui consiste à remplacer a, b, c, A, B, C respectivement

par $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$; il en conclut qu'on peut appliquer cette même substitution à toutes les formules de la Trigonométrie sphérique, puisque celles-ci résultent toutes des formules fondamentales. On sent que l'Auteur a hâte d'arriver aux applications numériques, but principal de son Livre, et qu'il ne veut pas s'attarder en route. Il semble cependant que quelques explications sur la transformation polaire, considérée au point de vue géométrique, sur la dualité qu'elle met en évidence, sur les propriétés des triangles polaires et des trièdres supplémentaires, auraient été plus satisfaisantes pour l'esprit que la simple vérification de cette dualité sur les formules fondamentales; d'ailleurs, le principe de dualité, s'il avait été établi au début, aurait permis de supprimer la démonstration directe d'une partie des formules.

Les Chapitres III et IV sont consacrés à la résolution numérique des triangles sphériques, avec de nombreux exemples.

Dans le Chapitre V, on trouve de nouveaux exemples tirés de problèmes d'Astronomie ou de Navigation : détermination du grand cercle de navigation, détermination de la longitude en mer, réduction d'un angle à l'horizon, passage de chacun des deux systèmes fondamentaux de coordonnées astronomiques à l'autre système.

Le Chapitre VI est relatif aux méthodes graphiques de résolution. L'Auteur donne tout d'abord, sous le nom de *Monge's Method*, la détermination, par la Géométrie descriptive, des divers éléments d'un trièdre dont on connaît trois éléments, telle qu'elle est effectuée dans presque tous les Ouvrages français d'enseignement de la Géométrie descriptive : M. Bell se borne aux cas les plus simples et, dans chacun de ces cas, il vérifie la construction géométrique analytiquement en montrant que les formules déduites de cette construction coïncident avec celles qu'on a établies directement dans les Chapitres précédents.

Dans un ordre d'idées tout différent, on peut appliquer aux formules de trigonométrie des méthodes de calcul graphique. L'Auteur fait remonter cette façon de procéder à l'*Analemma* de Ptolémée; de la même idée que l'*Analemma* procède l'appareil moderne imaginé par Chauvenet et dont un exemplaire, construit à Édimbourg, a pu servir à Sir F.-W. Dyson dans des recherches astronomiques : l'idée essentielle consiste à dessiner une projection plane

stéréographique, par exemple de la sphère, avec la projection d'un réseau de parallèles et de méridiens et à placer sur ce réseau projeté la projection d'un réseau tout pareil, mais tracé sur un transparent mobile autour du centre commun aux deux réseaux; le réseau mobile est ainsi superposable au réseau fixe par une rotation. On peut, en plaçant les deux réseaux dans une certaine position l'un par rapport à l'autre, de façon que leurs centres coïncident, obtenir la projection de n'importe quel triangle sphérique en prenant comme côtés du triangle des cercles du réseau fixe ou du réseau transparent, et on lit alors directement sur les graduations des deux réseaux les éléments inconnus du triangle : avec un appareil de 8 pouces $\frac{1}{2}$ de diamètre, on peut avoir les angles à $0^\circ,5$ près. Dans le même ordre d'idées, l'auteur a imaginé une projection cylindrique des deux réseaux sur un cylindre circonscrit à la sphère : on peut alors superposer les deux réseaux, développés sur un plan, à l'aide d'une translation, au lieu de les superposer par une rotation comme dans l'appareil décrit plus haut.

Enfin M. Bell termine son Livre en appliquant aux différentes formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique les belles méthodes nomographiques dues à M. Maurice d'Ocagne; les nomogrammes à points alignés, donnés par M. d'Ocagne pour la résolution des triangles sphériques, et reproduits avec soin dans le Livre de M. Bell, permettent de résoudre les triangles pour ainsi dire instantanément, en première approximation tout au moins, à l'aide d'un simple fil tendu sur la figure.

On voit combien ces méthodes graphiques sont variées et intéressantes. Elles donnent lieu à d'excellents exercices tant au point de vue théorique qu'au point de vue du dessin et du calcul.

S. Lattès.

GREENHILL (Sir G.). — Report on Gyroscopic Theory. (*Advisory Committee for Aeronautics. Reports and Memoranda*, n° 146). 1 vol. in-4 jésus, avec 11 planches, III-277 pages. London and Cardiff, Wyman and Sons; Edinburg, H. M. Stationery Office; Dublin, E. Ponsonby; London, T. Fisher Unwin; 1914.

Le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe est un des plus beaux de toutes les Mathématiques et en

même temps un des plus célèbres, car, depuis un siècle et demi, les plus illustres géomètres se sont efforcés d'en donner des solutions nouvelles ou d'en perfectionner les anciennes. La série commence par un grand analyste, Euler, et a pour second auteur un autre savant de la même tournure d'esprit, c'est-à-dire Lagrange. Ensuite cette question a occupé un mathématicien de toute autre physionomie, Poinsot, « qui (j'emprunte ces phrases à Chasles), guidé par une sagacité admirable, parvint par le simple raisonnement à la solution d'une question difficile, qui, jusqu'alors, avait été du ressort de l'Analyse la plus savante ». Poinsot trouva des admirateurs et des suivants parmi ceux qui préfèrent voir traitées sans calcul les questions géométriques (je cite comme exemples Chelini et Mac-Cullagh); mais, comme la question dépend au fond des fonctions elliptiques, les analystes s'y intéressèrent beaucoup et ils y appliquèrent les ressources puissantes qui étaient à leur disposition : avant tout Legendre, ensuite Jacobi, Richelot et leurs élèves, enfin Weierstrass et une foule d'autres mathématiciens qui en exploitèrent ou en modifièrent les procédés.

Les phénomènes physiques auxquels se rapportent toutes ces belles recherches reçurent une première représentation dans un jeu qui fait depuis longtemps le bonheur des petits enfants, c'est-à-dire la *toupie*. Mais plus tard ils se présentèrent de nouveau sous un jour plus sérieux dans le *gyroscope*, cet appareil qui, sorti des cabinets de physique, a rendu des services d'une importance hors ligne dans plusieurs branches de la Mécanique appliquée et dernièrement dans la navigation aérienne. C'est le motif qui a déterminé la Commission, chargée par le Gouvernement anglais d'étudier les questions théoriques relatives à l'Aérodynamique, à consacrer un de ses Rapports à la Théorie du Gyroscope. Cette détermination prise, le choix du rapporteur ne pouvait être douteuse; il devait tomber sur M. Greenhill, qui s'occupe de cette théorie depuis longtemps (j'ai encore dans les oreilles la brillante Conférence qu'il fit sur ce sujet en 1904 au Congrès des Mathématiciens de Heidelberg), qui manie les formules les plus compliquées de la théorie des fonctions elliptiques avec l'aisance d'un calculateur consommé (tout le monde sait qu'il a consacré aux *Applications* de ces fonctions un Livre devenu bientôt classique); qui, enfin, comme ancien professeur dans une grande

École militaire, sait mesurer toute l'importance des recherches destinées à perfectionner la plus puissante des armes dont se sert la guerre sous sa forme la plus moderne, la guerre à trois dimensions.

Ces trois aspects de la personnalité de l'Auteur se retrouvent dans l'excellent Ouvrage que nous avons sous les yeux et qui est formé de *neuf* Chapitres dont voici les titres :

I. *Du mouvement stable du gyroscope.*
II. *Applications du gyroscope.*
III. *Du mouvement instable d'une toupie ou d'un gyroscope.*
IV. *Représentation géométrique du mouvement d'une toupie.*
V. *Des cas algébriques du mouvement de la toupie.*
VI. *Applications numériques; diagrammes.*
VII. *Pendule sphérique.*
VIII. *Du mouvement rapporté à une origine et à des axes mobiles.*
IX. *Des problèmes dynamiques relatifs au mouvement stable et des petites oscillations.*

L'exposition est de préférence analytique; des pages entières sont remplies par des formules, élégantes et symétriques, mais naturellement un peu compliquées, car elles se rapportent à l'une des questions les plus élevées et les plus difficiles des Mathématiques modernes. Toutefois, un nombre considérable de figures bichromes, tracées avec tout le soin et tout l'art désirables, donnent un attrait et une vie inattendus aux froids développements analytiques. Il est bon d'ajouter que, quoique l'objet de la publication que nous analysons soit de nature technique, l'Auteur n'a pas exclu ce qui est purement théorique : par exemple, nous trouvons la recherche de la courbure et des singularités de la polhodie et de l'herpolhodie et encore la belle relation, découverte par M. Darboux, entre le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe et la déformation d'un hyperboloïde articulé.

L'Ouvrage de M. Greenhill met à la disposition des ingénieurs et des officiers un arsenal riche et bien ordonné de tous les appareils analytiques qu'on doit employer pour résoudre les questions ayant pour objet les gyroscopes. Or, il y a bon nombre de prati-

ciens qui, pour traiter les problèmes qu'on rencontre dans la science des constructions, emploient la règle, le compas et le tire-ligne au lieu de la Table des logarithmes, arrivant de la sorte rapidement à des résultats exacts jusqu'au deuxième chiffre décimal, ce qui est en général suffisant pour la pratique. C'est la Statique graphique qui a rendu possible la création des dessinateurs-savants à côté des anciens calculateurs; les bons résultats obtenus par cette voie font désirer qu'à côté de la théorie *analytique* du gyroscope, fournie aux ingénieurs-calculateurs par M. Greenhill, on en ait une analogue, mais *graphique*, destinée aux ingénieurs-dessinateurs, à laquelle on parviendra probablement en choisissant comme point de départ les Mémoires de Poinsot. En formulant, dans l'intérêt de la Science et de ses applications, le vœu pour la création de cette nouvelle théorie, nous sommes sûr de pouvoir compter sur l'appui de M. Greenhill, dont le dévouement aux Mathématiques est connu de tout le monde.

GINO LORIA.

ECHEGARAY (JOSÉ). — CONFERENCIAS SOBRE FISICA MATEMATICA. *Curso de* 1905 *á* 1906 *: Introduction.* 1 vol. gr. in-8, 341 pages. Madrid. Establecimiénto Tipográfico y Éditorial: 1912.

La publication des *Conférences de Physique mathématique* de M. Echegaray est une intéressante manifestation du mouvement de renaissance scientifique qui se développe de nos jours en Espagne. Les sept Volumes de l'Ouvrage de M. Echegaray reproduisent ses cours professés à l'Université de Madrid pendant sept années consécutives et tous les principaux problèmes de la Physique mathématique s'y trouvent examinés.

M. Echegaray a fort bien compris dans quel esprit devait être dirigé son enseignement pour développer en Espagne le goût des études et des recherches de Physique mathématique. Ses conférences offrent aux étudiants une exposition générale, assez élémentaire, de la Physique mathématique. Elles leur feront aimer cette science et les prépareront, les inciteront à l'étude des Mémoires originaux et des Traités plus spéciaux avec lesquels ce Livre ne fait pas double emploi.

J'ai dit plus haut que ces *Conférences* étaient élémentaires : elles sont d'une lecture aisée, ce qui ne veut point dire que les difficultés, les obscurités des théories de la Physique mathématique y soient masquées sous une simplicité trompeuse. Un esprit critique sûr a présidé à la discussion des théories et leurs points délicats y sont, sinon étudiés avec tout l'appareil mathématique nécessaire, du moins indiqués. Mais M. Echegaray se limite autant que possible après avoir établi les équations fondamentales du problème; il s'arrête peu à l'édifice plus strictement mathématique qui repose sur ces équations; il en développe seulement la partie la plus élémentaire, ou celle qui est nécessaire pour discuter la théorie. Tout cela est bien conforme à l'esprit de son Livre qui doit constituer une vaste introduction à l'étude de la Physique mathématique.

Comme l'enseignement d'une science doit présenter une sorte de raccourci de son histoire, M. Echegaray est amené à insister d'abord sur la Physique mathématique classique; il n'a pourtant pas négligé les théories modernes. Chacun de ses Cours comprend deux parties principales : d'abord une exposition des théories et des méthodes développées jusqu'au dernier tiers du siècle dernier, puis une étude des critiques modernes de ces théories et des indications sur les nouvelles orientations de la Physique mathématique. La seconde partie n'est point négligeable : la place qu'occupent dans ces Livres les idées et les recherches de Henri Poincaré suffirait à le prouver.

Peut-être est-il permis de regretter que M. Echegaray, tout en conservant à ses leçons la forme si vivante sous laquelle elles ont été dites, ne leur ait pas ajouté, pour la publication, quelques détails, bien inutiles dans un Cours, utiles dans un Livre qui doit être un instrument de travail : il manque à ces Volumes quelques titres indiquant plus clairement les sujets traités dans chaque leçon, et une Table des matières. On y trouverait aussi avec plaisir de plus nombreuses et plus précises références aux Mémoires dont l'Ouvrage de M. Echegaray doit préparer la lecture. Peut-être, dans une édition suivante, M. Echegaray pourra-t-il remédier à ces petits inconvénients qui ne diminuent en rien la valeur de son œuvre.

Volume I. — *Cours de* 1905 *à* 1906.

Le premier Volume, *Introduction à la Physique mathématique*, s'adresse, par son sujet comme par la simplicité de l'exposition, à un public très étendu. M. Echegaray examine d'abord (Conf. I à VIII) les caractères de la Physique mathématique et de la Physique expérimentale, leurs différences essentielles et leurs relations nécessaires : naturellement, cette étude est faite sur des exemples et nous nous trouvons ainsi amenés à passer en revue, comme il sied dans une Introduction, quelques problèmes importants de la Physique mathématique.

L'étude de la loi de compressibilité des gaz, celle de la réflexion de la lumière, puis celle de la distribution électrique sur une sphère conductrice lui permettent de montrer comment on établit une loi expérimentale, comment ensuite on l'explique.

L'exemple suivant : *Loi d'équilibre des températures*, tient une place importante dans ce Volume (Conf. III à VI). Après avoir indiqué en quoi consiste l'hypothèse moléculaire et donné, d'après Barré de Saint-Venant, quelques indications sur ce que doit être la loi d'action entre 2^{mol}, M. Echegaray étudie les petits mouvements d'un système formé par deux, trois, ou un très grand nombre de molécules disposées en ligne droite. Le lecteur rencontre là, pour la première fois, ce procédé fondamental en Physique mathématique qui consiste à remplacer un système d'un grand nombre d'équations différentielles par une équation aux dérivées partielles. Si la représentation précédente du corps solide ne donne pas sous cette forme simple, comme le montre M. Echegaray, une image satisfaisante de la propagation de la chaleur, elle n'en est pas moins suffisante pour d'autres théories. L'Auteur indique, d'après Barré de Saint-Venant, comment elle permet d'expliquer la dilatation des solides. Il traite le cas de 2^{mol} et prouve aisément que leur distance moyenne doit croître avec la force vive moyenne du mouvement qui représente la température : il faut, pour obtenir ce dernier résultat, tenir compte, dans la loi d'action des 2^{mol}, des termes du second ordre proportionnels au carré de l'élongation.

A défaut d'explication plus ou moins mécanique des phéno-

mènes, c'est encore le rôle de la Physique mathématique de les réduire les uns aux autres et d'introduire ainsi plus d'unité dans la science. L'Auteur illustre cette tendance d'un exemple typique : l'explication, donnée par Ampère, de la loi d'action d'un courant sur un pôle d'aimant à partir de la loi d'action de deux courants. Il indique ensuite les points faibles de cette théorie, trop connue en France après les importants travaux de Henri Poincaré pour qu'il soit utile d'insister.

M. Echegaray est revenu à plusieurs reprises au cours de ce Volume, avec une visible sympathie pour le mécanisme, sur l'influence heureuse qu'ont eue et qu'auront encore, après des modifications notables, les explications mécaniques sur le développement de la Science. Mais il a dû mettre aussi en évidence, d'après Poincaré, le caractère relatif de ces explications et il consacre la seconde partie de son Livre (Conf. IX à XII) à la démonstration du théorème de Poincaré, d'après lequel, *s'il existe une explication mécanique d'un phénomène, il en existe une infinité*. La démonstration de ce fait repose sur la forme donnée par Lagrange aux équations de la Mécanique. Ces équations jouent un trop grand rôle en Physique mathématique pour que l'Auteur puisse se dispenser de les établir; il reprend la question *ab initio :* principe des vitesses virtuelles, principe de moindre action de Hamilton, équations de Lagrange.

Il est impossible, dans un bref compte rendu, de montrer avec quel soin ce Livre a été rédigé pour remplir son rôle d'introduction : M. Echegaray s'est constamment préoccupé de préparer des développements ultérieurs et il a su tirer, d'exemples très simplement traités, le meilleur parti pour rendre aisée la lecture des Volumes suivants de son œuvre.

J. Pérès.

MÉLANGES.

CALCUL CORRECT DE L'INFLUENCE DE L'INÉGALITÉ CLIMATÉRIQUE SUR LA VITESSE D'ACCROISSEMENT DES TEMPÉRATURES TERRESTRES AVEC LA PROFONDEUR SOUS LE SOL;

PAR M. J. BOUSSINESQ.

I. Dans un Article consacré au refroidissement séculaire de la croûte terrestre et que contient le récent *Bulletin des Sciences mathématiques* de septembre 1915, j'ai essayé (nos 5 à 10) de tenir compte de l'inégalité u_{em} des températures extérieures moyennes dans les diverses contrées, en admettant la permanence (depuis l'origine du refroidissement) de cette inégalité et de la température extérieure *moyenne générale* à partir de laquelle se comptent ses valeurs. Mais, pour réduire à sa forme la plus simple le problème propre du refroidissement de la croûte, je n'ai défalqué des températures effectives v, outre l'inégalité périodique u_p (en partie *annuelle* et en partie *diurne*) affectant seulement une mince couche superficielle, épaisse d'une quinzaine de mètres, que la partie *permanente* u_m de l'*inégalité* (*climatérique*) due à u_{em} : ce qui permet bien de réduire à leurs formes les plus simples, pour la température en excédent u, tant l'équation indéfinie du refroidissement

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2},$$

que les deux conditions définies relatives au sol $x = 0$ et au fond $x = E$ de la croûte, devenues

$$(2) \qquad (\text{pour } x = 0)\ \frac{1}{h}\frac{du}{dx} = u, \qquad (\text{pour } x = E)\ u = u_0,$$

mais ce qui a l'inconvénient de laisser une forme compliquée à la condition d'état initial

$$(3) \qquad (\text{pour } t = 0)\ u = u_0 - u_m - u_p^0,$$

où u_0 désigne la température constante de fusion de la croûte et u_p^0 ce à quoi se réduit, pour $t = 0$, l'inégalité périodique u_p. Or, pour ramener cette condition à celle, la plus simple possible,

que j'utilise finalement,

$$(4) \qquad (\text{pour } t = 0)\ u = u_0,$$

je me suis contenté de dire que les deux conductibilités intérieure et superficielle ont dû depuis longtemps effacer, jusqu'à des profondeurs excédant celles où nous pouvons atteindre, toute trace de l'influence des termes $-u_m$ et $-u_p^0$, médiocrement grands. Cette raison, d'un nivellement des valeurs de u à partir de la surface $x = 0$, motive bien la suppression du terme $-u_p^0$, insensible pour $x > 15^m$; mais, comme on étudie justement le *refroidissement* de la croûte, c'est-à-dire un état encore très loin de la permanence, il n'est pas légitime de supposer devenue permanente l'inégalité climatérique. En effet, malgré la petitesse de u_{em} à côté de u_0, et toute proportion étant gardée entre ces deux *causes* de déplacements de chaleur, il n'y a pas de raison pour que la pénétration de haut en bas, à travers la croûte, de la chaleur extérieure, devienne plus tôt permanente que celle qui s'y fait à partir du fond, de bas en haut, de la chaleur intérieure du globe.

II. Il y a donc lieu, pour réduire effectivement à sa forme la plus simple (4) la condition d'état initial (3), de calculer à part le refroidissement de la croûte pour un état initial exprimé par $-u_m$, c'est-à-dire la portion de u qui correspond à ce terme de (3), et de joindre alors, à la partie permanente u_m de l'inégalité due à u_{em} (ou *inégalité climatérique*), cette portion de u, qui sera la partie *non permanente* de la même inégalité. Ce qui reste ensuite de u correspond bien à l'état initial simple (4) et continuera à s'appeler u.

Désignons par U_m l'inégalité climatérique *totale*, ainsi définie dans ses deux parties; et les conditions qui la détermineront seront évidemment les trois équations

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{dU_m}{dt} = a^2 \dfrac{d^2 U_m}{dx^2}, & (\text{pour } x = 0)\ \dfrac{1}{h}\dfrac{dU_m}{dx} = U_m - u_{em}, \\ & (\text{pour } x = E)\ U_m = 0, \end{array} \right.$$

complétées par la relation d'état initial

$$(6) \qquad (\text{pour } t = 0)\ U_m = 0.$$

III. Pour intégrer ces équations, appelons $1 - V$ l'expression de u (ainsi débarrassée complètement des deux inégalités pério-

dique u_p et climatérique U_m), spécifiée pour $u_0 = 1$; de sorte qu'on ait

$$u = u_0 - u_0 V.$$

La fonction V sera, en d'autres termes, $1 - \frac{u}{u_0}$, c'est-à-dire, très sensiblement, vu la formule approchée que nous avons obtenue pour u,

$$(7) \qquad V = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - e^{h^2a^2t+hx}\psi\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ha\sqrt{t}\right)\right],$$

où $\psi(\omega)$ désigne la fonction de Krampf

$$\int_\omega^\infty e^{-\alpha^2}\,d\alpha.$$

La substitution de $u_0 - u_0 V$ à u dans (1), (2) et (4) montre que V satisfait aux quatre relations

$$(8) \qquad \frac{dV}{dt} = a^2\frac{d^2V}{dx^2}, \qquad (\text{pour } x = 0)\ \frac{1}{h}\frac{dV}{dx} = V - 1,$$
$$(\text{pour } x = E)\ V = 0, \qquad (\text{pour } t = 0)\ V = 0.$$

Or celles-ci, multipliées par la constante donnée u_{em}, deviennent précisément les équations (5) et (6) en prenant

$$U_m = u_{em} V.$$

Telle est donc la valeur de l'inégalité climatérique totale, qu'il suffit de joindre à la valeur même, $u_0 - u_0 V$, de u, pour avoir la température effective v à toutes les profondeurs x excédant une quinzaine de mètres et où est insensible l'inégalité périodique u_p. Il vient ainsi

$$(9) \qquad v = u_0 - (u_0 - u_{em})V = u_0\left[1 - V\left(1 - \frac{u_{em}}{u_0}\right)\right].$$

Bref, la différence $v - u_{em}$, exprimée par $(u_0 - u_{em})(1 - V)$, est simplement proportionnelle à $u_0 - u_{em}$. On l'aurait vu immédiatement en prenant la température u_{em} pour origine des températures; ce qui aurait rendu les équations du problème homogènes en $v - u_{em}$ et remplacé l'état initial u_0 par $u_0 - u_{em}$ [1].

---

[1] Pour y arriver naturellement, il aurait suffi, au début, de désigner par v_{em}, v_{ep}, v_m, v_p, V_m, V_p ce que nous appelons ici u_{em}, u_{ep}, u_m, u_p, U_m et, de même, U_p (composé de la partie périodique u_p et d'une partie rapidement évanouissante, à valeur initiale $-u_p^0$), enfin, de poser $u = v - V_m - V_p$, fonction qui se réduit initialement à u_0, car V_m et V_p sont nuls pour $t = 0$.

IV. La vitesse $\frac{dv}{dx}$ d'accroissement de la température avec la profondeur égale donc, en tout point de la croûte, le produit de ce qu'elle y serait *sans l'inégalité climatérique*, par le binome très imple

$$(10) \qquad 1 - \frac{u_{em}}{u_0} = 1 - \frac{u_{em}}{149^5} = 1 - 0{,}0006689\, u_{em}.$$

L'influence de l'inégalité climatérique, mesurée proportionnellement par le coefficient de $-u_{em}$ dans ce binome, est environ le double de ce qu'indique le coefficient de $-u_{em}$ au troisième membre de la formule (14) de mon Article cité du *Bulletin* : circonstance tenant à la manière même dont nous y avons déterminé, en raison directe de u_0, l'épaisseur E de la croûte.

La partie non permanente de l'inégalité climatérique semble donc avoir, du moins actuellement, à la surface du sol, à peu près autant d'influence que la partie permanente, sur la dérivée $\frac{dv}{dx}$; et la conclusion du n° 10 de mon Article du *Bulletin* subsiste, touchant la petitesse totale de ces influences qui s'ajoutent.

Il est bon d'observer que, pour V comme pour u, la condition relative au bas $x = \mathrm{E}$ de la croûte n'est vérifiée, par l'expression approchée (7) de V ou par l'expression correspondante de u, qu'à très peu près et, pour ainsi dire, asymptotiquement.

V. Si le temps t grandit assez pour que s'établisse sensiblement la *permanence* de l'état calorifique, la partie de v dépendant de u_{em} sera

$$u_m = \frac{h\mathrm{E}}{1 + h\mathrm{E}}\, u_{em}\left(1 - \frac{x}{\mathrm{E}}\right),$$

et, celle qui dépendra de u_0, visiblement,

$$\frac{u_0(1 + hx)}{1 + h\mathrm{E}}.$$

Il viendra donc, en tout,

$$(11) \qquad v = \frac{(u_0 + h\mathrm{E}u_{em}) + (u_0 - u_{em})hx}{1 + h\mathrm{E}}.$$

La dérivée $\frac{dv}{dx}$ n'y dépend encore de u_{em} que par le binome

$1 - \frac{u_{em}}{u_0}$, comme il le fallait bien puisque il s'agit d'un état compris, en qualité de cas limite, dans celui auquel s'applique la formule (9).

VI. Au n° 19 de l'Article cité du *Bulletin*, je suis revenu accessoirement sur la même question, mais en admettant que l'état actuel de la superficie terrestre soit relativement récent. On ne peut plus alors raisonner comme si l'épaisseur actuelle E de la croûte et les distributions actuelles des températures extérieures u_{em} avaient existé dès l'origine du refroidissement, ni, par conséquent, appliquer la formule (9). Mais il y a tout lieu de penser que l'état actuel est assez ancien pour avoir déjà produit, aux profondeurs modérées x sous la surface, le gros de ses effets et que, par suite, la dérivée $\frac{dv}{dx}$ y a la fraction de ses valeurs qui provient de u_{em}, *comparable* en petitesse au rapport

$$\frac{-u_{em}}{u_0} = \frac{-u_{em}}{1495}.$$

Faisons une dernière remarque à ce sujet. Aux grandes profondeurs x, là où les températures excèdent des centaines de degrés, la conductibilité K, mais surtout la capacité calorifique C et leur quotient a^2, deviennent sans doute trop largement fonctions de v pour qu'on puisse les supposer constants, comme nous avons fait, *si ce n'est à un degré restreint d'approximation;* et celui ci ne serait probablement pas suffisant pour nous permettre d'apprécier ou d'éviter, dans le calcul de v, des écarts de l'ordre de petitesse de u_{em}. Il serait donc à peu près illusoire, en ce qui concerne l'influence climatérique à l'intérieur de la croûte, d'y compter physiquement sur aucun autre résultat que la petitesse même ou, pour ainsi dire, l'*indiscernabilité* de l'influence en question.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXIX.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXIX; 1915. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES AUTEURS.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

ANNUAIRE POUR L'AN 1915, publié par le Bureau des Longitudes..... 88-89

ARRHÉNIUS (S.). — Conférences sur quelques thèmes choisis de la Chimie physique pure et appliquée..... 38-40

BELL (H.). — A curse of the solution of spherical Triangles..... 278-281

BERZOLARI (L.). — Geometria analitica..... 277-278

BRUNSCHVICG (L.). — Les étapes de la Philosophie mathématique..... 221-234

CHAUMONT (J.-L.). — Recherche sur le phénomène électro-optique de Kerr et sur les méthodes servant à l'étude de la lumière polarisée elliptiquement..... 35-37

COFFIN (J.-G.). — Calcul vectoriel avec applications aux Mathématiques et à la Physique..... 139-147

COMBEROUSSE (CH. DE). — Cours de Mathématiques : Algèbre supérieure, 2e Partie..... 234-236

CONTENSON (L. DE). — Les Fondements mathématiques dans l'hypothèse de la Philosophie critique..... 54-61

COTTON (E.). — Cours de Mécanique générale. Introduction à l'étude de la Mécanique industrielle. Tome I..... 115-121

CREMONA (L.). — Opere matematiche di Luigi Cremona :

Tomo primo..... 113-114

Tomo secondo..... 137

DUHEM (P.). — Le Système du monde..... 5-13

Pages.

ECHEGARAY (J.). — Conferencias sobre Fisica mathematica curso de 1905 à 1906 284-287
GREENHILL (Sir G.). — Report on Gyroscopic Theory 281-284
HILTON (H.). — Homogenous linear Substitutions 268-277
JORDAN (C.). — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique 13-18
KAMPÉ DE FÉRIET. — Sur les fonctions hypersphériques. Thèse 138-139
LEBON (E.). — Savants du jour : Émile Picard 41-42
MACMAHON (A.). — Combinatory Analysis 237-242
MAGGI (G.-A.). — Geometria di Movimento 174-178
MARCELIN (R.). — Contribution à l'étude de la Cinétique physico-chimique 147-148
MIER (E.). — Les équations fondamentales et l'amortissement des sismographes 247-248
MIKAMI (Y.). — *Voir* SMITH (D.-E.).
MILHAUD (G.). — Nouvelles études sur l'histoire de la pensée 71-85
MILHAUD (G.) et POUGET (E.). — Cours de Géométrie analytique. Tome I 97-104
NIEWENGLOWSKI (B.). — Cours de Géométrie analytique. Tome III 178
PAPIN (P.). — Nouvelle manière pour lever l'eau par la force du feu .. 87-88
PERÈS (J.). — Sur les fonctions permutables de première espèce de M. Vito Volterra. Thèse 242-247
POUGET (E.). — *Voir* MILHAUD (G.).
SALMON (G.). — A Treatise on the analytic Geometry of three dimensions. Vol. II 114
SMITH (D.-E.) and MIKAMI (Y.). — A History of Japanese Mathematics. 25-34
SOMMERVILLE (D.-M.-Y.). — The Elements of non-euclidean Geometry. 49-53
STIELTJES (J.). — Œuvres complètes de Thomas Jan Stieltjes 169-171
THOMPSON (A.-W.-H.). — A new Analysis of plane Geometry, finite and differential 171-174
TRIGNART (A.). — Table auxiliaire d'intérêts composés 18
VOLTERRA (V.). — The Theory of permutable Functions 265-268
ZORETTI (L.). — Exercices numériques et graphiques de Mathématiques sur les *Leçons de Mathématiques générales* 85-87
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE 72, 136, 168, 264

MÉLANGES.

APPELL (P.). — Sur les courbes algébriques définies par une relation paramétrique 43-48
BOTTASSO (M.). — Sur une enveloppe de droites 90-96
BOUSSINESQ (J.). — Sur le problème du refroidissement de la croûte terrestre, considéré à la manière et suivant les idées de Fourier 195-220
BOUSSINESQ (J.). — Calcul de l'influence de l'inégalité climatérique sur la vitesse d'accroissement des températures terrestres avec la profondeur du sol 288-292
BUHL (A.). — Sur les volumes dus à la rotation d'un contour 186-192
DARBOUX (G.). — Sur une transformation de contact 19-24
DARBOUX (G.). — Sur les familles de surfaces dont les trajectoires orthogonales sont des courbes planes 62-72

Pages.

DRACH (J.). — Sur le groupe de rationalité des équations du second ordre de M. Painlevé 149-166
GARNIER (R.). — La Conférence internationale de l'Enseignement mathématique, tenue à Paris du 1er au 4 avril 1914 105-111
GODEAUX (L.). — Exemples de surfaces algébriques de diviseur supérieur à l'unité 182-185
HADAMARD (J.). — Sur un Mémoire de M. Sundman 249-264
JABLONSKI (E.). — Note sur un point d'Histoire des Mathématiques... 166-168
MERLIN (J.). — Un travail sur les nombres premiers 121-136
PÉRÈS (J.). — Sur la méthode des fonctions majorantes et la méthode des approximations successives 179-181

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

D'ANALYSES.

Cahen (E.). 242.
Chapelon (J.). 34.
Cotty (G.). 61, 121, 147, 234.
Darboux (G.). 114, 137, 171, 278.
Garnier (R.). 85.
Giran (H.). 40.
La R. 37, 139, 148, 247.
Lattès (S.). 53, 178, 277, 281.
Lebesgue (H.). 18.
L. (Er.). 87, 89, 178, 236, 248.
Loria (G.). 15, 284.
Ouivet (E.). 104.
Pérès (J.). 268, 287.
Vessiot (E.). 174.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXXIX.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
56372 Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. G. DARBOUX, *président*

E. PICARD.

P. APPELL.

E. BOREL.

N.....

A. GUILLET, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Ernest Lebon*, Secrétaire de la Rédaction, rue des Écoles, 4 *bis*, Paris, 5e.

55432 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES.
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. P. APPELL, E. CARTAN, J. DRACH, P. DUHEM, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, ER. LEBON, G. LORIA, S. RINDI, H. G. ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY
ET DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXXIX. — ANNÉE 1915.

(L^e VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1915

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA [1].

Série II, Tome XXVI (septembre à décembre 1897).

Berzolari (*L.*). — Sur les invariants différentiels projectifs des courbes d'un hyperespace (1-58).

Ce Mémoire a pour objet l'extension aux hyperespaces de quelques-uns des résultats obtenus par Halphen dans ses recherches sur les invariants différentiels et leur application à l'étude des équations différentielles linéaires.

L'auteur établit tout d'abord les équations différentielles des courbes rationnelles normales de l'espace S_n à n dimensions, c'est-à-dire des courbes d'ordre n appartenant à S_n sans appartenir à des espaces d'ordre inférieur à n. Ces équations, d'ordre $n+3$, sont au nombre de $n-1$; pour $n=2$, on retrouve l'équation différentielle des coniques et pour $n=3$ les deux équations différentielles des cubiques gauches. En général, si l'on désigne par $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ les premiers membres de ces équations différentielles prises dans un certain ordre, l'ensemble formé par $T_{n-k}, T_{n-k+1}, \ldots, T_{n-1}$ est, quel que soit k, invariant par les transformations homographiques de S_n. On retrouve comme cas particuliers certains des invariants différentiels des courbes gauches trouvés par Halphen.

Soit maintenant une courbe quelconque et un point non singulier de cette courbe pris pour origine L'auteur montre qu'on peut, dans le voisinage de ce point, donner aux équations de la courbe la forme canonique

$$x_i = x^{i+1} + J^{(i)}_{n-i+2}\, x^{n+3} + J^{(i)}_{n-i+3}\, x^{n+4} + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

avec

$$J^{(n-2)}_i = 0.$$

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII$_2$, 1914, p. 171-176.

Les coefficients J sont alors des invariants différentiels projectifs dont le poids est égal à l'indice inférieur.

L'auteur étudie ensuite plus particulièrement les invariants de poids $3, 4, \ldots, n+1$; il donne leur expression à l'aide des quantités $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ et de leurs dérivées.

En additionnant plusieurs invariants de même poids, on obtient un nouvel invariant du même poids; en particulier, on peut former ainsi les invariants $j_3, j_4, \ldots, j_{n+1}$, de poids respectifs $3, 4, \ldots, n+1$, entiers par rapport aux quantités T et à leurs dérivées; ils ont une importance particulière provenant du fait qu'ils coïncident avec les invariants *linéaires* ou *fondamentaux* d'une équation différentielle linéaire d'ordre $n+1$.

A tout invariant différentiel projectif en correspond un autre par dualité; l'auteur établit les formules qui permettent de passer de l'un à l'autre. En particulier, les invariants $j_3, j_4, \ldots, j_{n+1}$ coïncident au signe près avec les invariants qui leur correspondent par dualité.

Enriques (*F.*) et *Fano* (*G.*). — Sur les groupes continus de transformations de Cremona de l'espace (59-99).

Le but de ce Mémoire est la classification des groupes continus de transformations birationnelles, ou transformations de Cremona, de l'espace, autrement dit la réduction de ces groupes à des types déterminés, à l'aide de transformations birationnelles.

Les auteurs établissent d'abord la proposition suivante, dont ils se servent fréquemment dans leur étude : tout groupe continu de transformations birationnelles de l'espace laisse invariants une infinité de systèmes linéaires de surfaces algébriques. Il en résulte que tout groupe crémonien de l'espace est semblable à un groupe projectif d'un certain espace S_n à n dimensions.

Dans la classification des groupes considérés, on est conduit aux conclusions suivantes.

Tout groupe primitif de transformations de Cremona est réductible *birationnellement* à un groupe projectif ou à un groupe conforme. Les groupes projectifs ont été déterminés par Lie. Dans le groupe ∞^{10} des transformations conformes, il y a un seul sous-groupe primitif qui ne puisse être transformé birationnellement en un groupe projectif : c'est le groupe des transformations conformes qui laissent une sphère invariante.

Parmi les groupes imprimitifs, certains sont réductibles birationnellement à des *groupes de Jonquières généralisés* (groupes possédant un faisceau invariant de droites ou un faisceau invariant de plans). Ceux qui échappent à cette réduction sont certains groupes crémoniens ∞^3 algébriques transitifs simples. Les auteurs sont donc amenés à étudier plus particulièrement ces derniers groupes : ils démontrent que les transformations d'un pareil groupe qui laissent invariant un point de l'espace doivent former un groupe fini, holoédriquement isomorphe à l'un des groupes de polyèdres réguliers; d'où, pour les groupes cherchés, plusieurs types correspondant aux divers polyèdres réguliers. Tout groupe du type diédrique se ramène à un groupe laissant invariant un faisceau de droites; tout groupe du type tétraédrique se ramène à un groupe conforme. Il reste donc seulement deux cas essentiellement nouveaux, correspondant à l'octaèdre et à l'icosaèdre : on peut réduire birationnellement les groupes du

type octaédrique à un groupe composé de ∞^3 transformations cubiques et ceux du type icosaédrique à un groupe formé de ∞^3 transformations du septième ordre.

Marcolongo (*R.*). — Formules pour la composition de plusieurs mouvements finis (101-112).

Ce Mémoire contient, sous forme explicite, les formules donnant les éléments d'un mouvement résultant de la composition de plusieurs mouvements finis. Les cas étudiés sont les suivants : 1° composition de deux ou plusieurs rotations finies autour d'axes concourants; 2° substitution d'un mouvement hélicoïdal à deux rotations autour d'axes non concourants; 3° cas général, c'est-à-dire composition de deux ou plusieurs mouvements hélicoïdaux.

Dans les formules qu'il établit, l'auteur emploie un symbolisme spécial qui lui permet d'écrire les formules explicitement sous une forme simple. Étant donnés deux axes k_r, k_s, il désigne par $(k_r k_s)$ le cosinus de l'angle de ces deux axes, par $[k_r k_s]$ leur moment mutuel. De même, soient trois axes k_i, k_r, k_s dont chacun est défini par ses cosinus directeurs, tels que α_i, β_i, γ_i, et par ses moments relatifs aux axes coordonnés, tels que λ_i, μ_i, ν_i. On posera

$$(k_i k_r k_s) = \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix},$$

$$[k_i k_r k_s] = \begin{vmatrix} \lambda_i & \mu_i & \nu_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \lambda_r & \mu_r & \nu_r \\ \alpha_s & \beta_s & \gamma_s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_i & \beta_i & \gamma_i \\ \alpha_r & \beta_r & \gamma_r \\ \lambda_s & \mu_s & \nu_s \end{vmatrix}.$$

Ces symboles sont ensuite généralisés pour n axes et l'on définit ainsi les deux symboles $(k_1 k_2 \ldots k_r)$ et $[k_1 k_2 \ldots k_r]$ qui interviennent dans les formules relatives à la composition des mouvements finis.

Lauricella (*G.*). — Sur les vibrations des solides élastiques (113-141).

Ce Mémoire complète un autre travail de l'auteur publié dans les *Memorie Accad. Torino* (2e série, t. XLV). Il est relatif aux solutions dites *exceptionnelles* des équations du mouvement des solides élastiques, dans le cas où les tensions sont nulles à la surface du corps.

Si l'on cherche à vérifier les équations du mouvement par un déplacement de la forme

$$u = p(x, y, z)\,\varphi(t), \qquad v = q(x, y, z)\,\varphi(t), \qquad w = r(x, y, z)\,\varphi(t),$$

on trouve que p, q, r doivent vérifier des équations de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta^2 p + A\dfrac{\partial \theta'}{\partial x} + k p = 0, \\ \Delta^2 q + A\dfrac{\partial \theta'}{\partial y} + k q = 0, \\ \Delta^2 r + A\dfrac{\partial \theta'}{\partial z} + k r = 0, \end{cases}$$

où A et k sont des constantes et où l'on a posé

$$\theta' = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial z},$$

ainsi que trois équations aux limites. La fonction $\varphi(t)$ est alors de la forme

$$\varphi(t) = \lambda \cos(t\sqrt{h}) + \mu \sin(t\sqrt{h}),$$

en posant

$$h = -\frac{k\,\mathrm{L}}{\rho}$$

(L constante d'isotropie, ρ densité).

L'auteur démontre qu'il existe une série, en général infinie, de valeurs du paramètre k à chacune desquelles correspondent trois fonctions p, q, r régulières vérifiant les équations (1) à l'intérieur du corps donné et les équations aux limites à la surface de ce corps. Ce sont ces valeurs qu'il appelle *valeurs exceptionnelles*, les solutions correspondantes étant dites *solutions exceptionnelles*. On obtient deux pareilles séries de solutions, la première correspondant à des déplacements initiaux arbitraires, la deuxième à des vitesses initiales arbitraires des divers points du corps élastique. Le mouvement du corps en général sera donné par la superposition des deux séries correspondantes de vibrations élémentaires toutes les fois que les composantes des déplacements initiaux et des vitesses initiales seront développables en séries convergentes de solutions exceptionnelles.

Cazzaniga (*T.*). — Sur les déterminants d'ordre infini (143-217).

Dans cet important Mémoire, l'auteur, mettant à profit divers travaux antérieurs, en particulier ceux de M. von Koch et ceux de M. Pincherle, s'est proposé de synthétiser et de généraliser ces travaux en donnant sous forme didactique un exposé de la théorie des déterminants infinis.

Nous indiquerons, avec les titres des divers Chapitres, quelques-unes des propriétés établies par l'auteur, en laissant de côté celles qui sont la généralisation immédiate des propriétés classiques des déterminants d'ordre fini, propriétés que l'auteur étend en toute rigueur aux déterminants d'ordre infini.

1. *Définitions, notations, exemples.* — Soit a_{ik} un ensemble doublement infini de nombres, où i et k reçoivent toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et soit D_{mn} le déterminant $[a_{ik}]$ obtenu en donnant à i et à k toutes les valeurs comprises entre $-n$ et $+m$. Si D_{mn} a une limite unique D pour m et n infinis, le déterminant infini $[a_{ik}]$ est dit *convergent* et a pour valeur D. Étant donnée la matrice des éléments a_{ik}, illimitée dans tous les sens, il faut, pour définir le déterminant, fixer dans cette matrice l'origine a_{00} et la diagonale principale. — 2. *Déterminants convergents. Propriétés générales.* — La valeur d'un déterminant convergent ne change pas quand on prend pour origine un élément diagonal arbitraire. Tout déterminant convergent dont les indices des lignes et des colonnes s'étendent de $-\infty$ à $+\infty$ peut être transformé en un nouveau déterminant convergent pour lequel les indices s'étendent de 1 à $+\infty$, hypothèse adoptée dans la suite par l'auteur. — 3. *Critères de convergence. Déterminants normaux.* — Un déterminant normal (von Koch) est un déterminant infini dans lequel le produit des éléments diagonaux est absolument convergent

ainsi que la série double des éléments non diagonaux. Un pareil déterminant est convergent. Il demeure convergent si l'on y remplace les éléments d'un nombre fini de lignes ou de colonnes par des éléments quelconques inférieurs en valeur absolue à un nombre positif fixe. — 4. *Mineurs d'un déterminant normal.* — 5. *Développement d'un déterminant normal.* — 6. *Propriétés des déterminants normaux.* — 7. *Multiplication des déterminants normaux.* — 8. *Produit de deux matrices.* — 9. *Déterminants réciproques.* Pour qu'un déterminant D admette un réciproque convergent et tel que la règle du produit lui soit applicable, il est nécessaire qu'on ait $0 \leqq |D| \leqq 1$. Si l'on exclut le cas $D = -1$, cette condition est aussi suffisante. Le réciproque d'un déterminant normal est ou bien égal à zéro, ou bien égal à ± 1, ou enfin divergent. — 10. *Quelques identités entre les mineurs d'un déterminant normal.* — 11. *Déterminants nuls et matrices nulles.* Caractéristique d'une matrice. — 12. *Étude d'une classe de déterminants convergents non normaux.* Si l'on multiplie les éléments des lignes et si l'on divise en même temps les éléments des colonnes d'un déterminant normal par des nombres $x_i (i = 1, 2, \ldots, \infty)$, le déterminant conserve la même valeur. — 13. *Une classe de déterminants nuls.* Il s'agit des déterminants $[a_{ik}]$ dans lesquels on a, quels que soient i et k,

$$|a_{ik}| \leqq \frac{A}{r^i s^k},$$

A, r, s étant trois nombres positifs fixes et $|rs|$ étant supérieur à 1. — 14. *Sur les systèmes linéaires finis.* Solution d'un système infini d'équations linéaires dont le déterminant est normal, dans le cas où les inconnues doivent être inférieures en valeur absolue à une borne finie. Discussion du système.

Levi (*B.*). — Sur la réduction des singularités ponctuelles des surfaces algébriques de l'espace ordinaire à l'aide de transformations quadratiques (219-253).

Soient F une surface algébrique, A un point multiple d'ordre s de cette surface ; une transformation quadratique admettant A comme point fondamental transforme F en une surface Φ_1, le point A en une courbe a_1 sur laquelle existent des points multiples d'ordre s de Φ_1 ; soit A_1 un de ces derniers points : si l'on opère sur A_1 comme on avait opéré sur A et ainsi de suite, on obtient une suite de surfaces $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ et une suite de points $A_1, A_2, \ldots$. L'auteur démontre que ces deux suites sont finies, c'est-à-dire qu'il existe une dernière surface Φ_r telle que sur la ligne a_r, transformée de A_{r-1}, il n'existe aucun point multiple d'ordre s de Φ_r ; ceci exige toutefois que les points $A_1, A_2, \ldots$ soient tels que, à partir de l'un d'entre eux, aucun de ces points ne soit situé sur la ligne transformée d'une ligne multiple d'ordre s passant par le point précédent.

Ce théorème étant démontré, il en résulte qu'on peut toujours passer par une suite de transformations quadratiques d'un point singulier quelconque O à un point simple.

Brioschi (*F.*). — Le discriminant des formes binaires du septième ordre (255-259).

La recherche de ce discriminant en fonction d'invariants de la même forme

a été faite par Gordan. L'auteur donne ici une nouvelle démonstration du résultat obtenu par Gordan.

Viterbi (*A.*). — Sur l'opération fonctionnelle représentée par une intégrale définie considérée comme élément d'un calcul (261-342).

L'opération fonctionnelle en question est la suivante :

Soit $f(y_1)$ une fonction de y_1 analytique et uniforme dans un certain champ et soit $a(y_1, y_2)$ une fonction analytique des deux variables y_1, y_2. L'intégrale $\int a(y_1, y_2) f(y_1)\, dy_1$ prise le long d'une certaine ligne l est une fonction analytique de y_2. L'auteur considère l'opération I par laquelle on passe de la fonction $f(y_1)$ à cette nouvelle fonction comme élément d'un calcul dont il pose les bases. Il étend d'abord aux opérations I les quatre opérations fondamentales de l'Arithmétique. Pour l'addition et la soustraction, ceci est immédiat. Pour la multiplication, l'opération BA correspondant aux *noyaux* successifs $a(y_1, y_2)$, $b(y_2, y_3)$ sera définie par

$$\mathrm{C}f(y_1) = \mathrm{BA}f(y_1) = \int_l \left[\int_{l_1} b(y_2, y_3)\, a(y_1, y_2)\, dy_2 \right] f(y_1)\, dy_1.$$

La division consiste à trouver B connaissant A et C : c'est le problème de l'inversion des intégrales définies tel qu'il a été traité par M. Volterra. M. Viterbi définit ensuite plus généralement les fonctions d'opérations I, la limite d'un ensemble d'opérations I et la continuité d'une fonction d'opérations. Les fonctions d'opérations considérées sont celles déduites d'un certain nombre d'opérations I par combinaison des quatre opérations fondamentales. On définit ensuite la dérivée d'une opération F(X), fonction d'une opération I variable désignée par X, par rapport à X, on établit les règles de calcul de ces dérivées, la formule de Taylor, la notion de dérivée partielle. L'auteur poussant encore plus loin l'extension au nouveau calcul des diverses opérations de l'Analyse, étudie les séries de puissances d'opérations I et la notion d'intégrale définie et indéfinie étendue au calcul des opérations I.

Dans une deuxième Partie, M. Viterbi applique à la théorie des fonctions d'opérations I les notions relatives aux fonctions de lignes introduites en Analyse par M. Volterra. A cet effet, l'auteur établit une certaine correspondance entre une opération I quelconque et une certaine ligne de l'espace variable avec I, et il applique la théorie de M. Volterra aux fonctions de cette dernière ligne. Considérant enfin les séries de puissances d'une opération I variable, l'auteur étend à ces séries les notions de cercle de convergence, de prolongement analytique et de fonction analytique.

Cremona (*L.*). — Francesco Brioschi (343).

M. Cremona annonce la mort de Brioschi, directeur des *Annali di Matematica*, revue qu'il avait fondée en 1858 avec Betti, Genocchi et Tortolini.

Beltrami (*E.*). — Notice nécrologique sur Brioschi (345-347).

S. Lattès.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK [1].

Tome CXLIII, 1913.

Schottky (*F.*). — Sur la classe de fonctions qui satisfait à l'équation $F\left(\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\right)=F(x)$ (1-24).

A toute substitution linéaire $x_1=\varphi(x)$ appartient une classe de fonctions qui restent invariantes quand on remplace x par x_1. Cette définition a besoin d'être précisée; c'est ce que l'auteur se propose de faire; cela le conduit à faire reposer sur cette définition la théorie des fonctions trigonométriques et des fonctions elliptiques et à faire ressortir en particulier le rôle joué dans cette dernière théorie par les fonctions thêta de Jacobi.

La relation homographique entre x et x_1 peut se mettre sous l'une des formes

$$\frac{x_1-a}{x_1-b}=q\frac{x-a}{x-b};$$

$$\frac{A}{x_1-a}=\frac{A}{x-a}+1.$$

En posant, suivant les cas,

$$c\frac{x-a}{x-b}=z,\qquad \frac{A}{x-a}+c=z,$$

ces relations deviennent

$$z_1=qz,\qquad z_1=z+1.$$

Trois cas sont à distinguer, dans chacun desquels l'auteur définit un domaine fondamental γ du plan de la variable z. Dans le premier cas, $|q|=1$, γ est la portion du plan comprise entre le demi-axe décrit par le point z réel et positif et le demi-axe décrit par le point $z_1=qz$ correspondant. Dans le second cas, $z_1=z+1$, γ est la portion du plan comprise entre l'axe des ordonnées et la parallèle menée par le point $z=1$. Dans le troisième cas, $|q|\gtrless 1$, γ est la couronne circulaire comprise entre les circonférences de centre O et de rayons 1 et $|q|$.

Si, dans chaque cas, on choisit la constante c de manière que le point $z=c$ soit à l'intérieur de γ, le domaine γ est l'image d'un domaine G du plan de la variable x et ce domaine s'étend à l'infini. Il est constitué par la portion du plan extérieur :

Dans le premier cas, à deux circonférences se coupant en a et b;

Dans le second cas (cas *trigonométrique*), à deux circonférences tangentes extérieurement en a;

Dans le troisième cas (cas *elliptique*), à deux circonférences extérieures et comprenant, à leur intérieur, l'une le point a, l'autre le point b.

Dans tous les cas, la frontière de G se compose de deux cercles ou arcs de

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII$_2$, p. 146-160.

cercles K_1 et K_{-1} tels que si x décrit K_{-1} en laissant G à droite, x_1 décrit K_1 en laissant G à gauche. Les points a et b sont dits dans le premier cas les points *singuliers* de la frontière; dans le cas trigonométrique il y a un seul point singulier, le point a; dans le cas elliptique il n'y en a pas.

On peut alors définir une *classe* de fonctions $F(x)$ satisfaisant aux conditions suivantes. La fonction $F(x)$ est définie pour chaque point intérieur à G et chaque point non singulier de sa frontière, et se comporte comme une fonction rationnelle au voisinage de chacun de ces points. Elle tend vers des valeurs déterminées lorsque x tend vers les points singuliers de la frontière en restant à l'intérieur de G. Enfin elle reprend sa valeur lorsqu'on passe, sans sortir du domaine G, d'un point quelconque x de K_{-1} au point $x_1 = \varphi(x)$ de K_1. Dans le cas trigonométrique, il peut y avoir deux valeurs limites pour $F(x)$ au point singulier a, suivant que x tend vers a en restant dans l'une ou l'autre des deux régions de G voisines de a.

On démontre facilement qu'*il n'existe aucune fonction de la classe qui ne devienne jamais infinie dans* G et que *deux fonctions quelconques* ω *et* ω' *de la classe sont liées par une équation algébrique.*

Le premier cas se traite immédiatement : toutes les fonctions de la classe sont les différentes fonctions rationnelles de

$$u = z^{\frac{2\pi}{\omega}},$$

où ω désigne l'angle sous lequel se coupent les deux arcs de cercle K_{-1} et K_1.

Le cas trigonométrique est le plus difficile. Si l'on considère la suite infinie des points x_λ, où λ varie de $-\infty$ à $+\infty$, définis par les conditions

$$x_0 = x, \qquad x_{\lambda+1} = \varphi(x_\lambda),$$

la série $\Sigma(x'_\lambda - x_\lambda)$ est absolument convergente. En posant

$$\Sigma(x_\lambda - x'_\lambda) = u - u',$$

où u désigne une fonction de x et u' la même fonction de x', on définit la fonction u à une constante près, qu'on peut déterminer par la condition que u change de signe si l'on remplace x par $2a - x$.

L'égalité

$$(x-a)^2 \frac{du}{dx} = p = \Sigma(x_\lambda - a)^2$$

définit une deuxième fonction $p(x)$ qui, comme u, ne devient infinie que pour $x = \infty$ et les points homologues. Ces deux fonctions ne changent pas quand on remplace x par $\varphi(x)$.

Plus généralement, si $R(x)$ est une fonction rationnelle qui admet $x = a$ comme zéro d'ordre 2 au moins, la série

$$V = \Sigma R(x_\lambda)$$

définit une fonction de la classe s'annulant au point a. Si l'on sait simplement que $R(x)$ ne devient pas infinie pour $x = a$, l'équation

$$U - U' = \Sigma[R(x_\lambda) - R(x'_\lambda)]$$

définit, à une constante près, une fonction U de la forme

$$U = \alpha + \beta u + V.$$

L'étude des fonctions U au voisinage de $x = a$ revient donc à celle de la fonction u. L'auteur montre que, suivant que x tend vers a par une région ou l'autre de G, u tend vers $A\pi i$ ou $-A\pi i$. La fonction u appartient donc à la classe. De plus, toute fonction de la classe qui ne devient infinie que pour $x = \infty$ et les points homologues est un polynome entier en u. En particulier, il en est ainsi de la fonction p; et l'on trouve facilement

$$p = (x - a)^2 \frac{du}{dx} = u^2 + A^2\pi^2.$$

L'auteur démontre enfin que toute fonction de la classe est une fonction rationnelle de u.

On peut aussi représenter les fonctions de la classe par des produits infinis. L'auteur considère en particulier la fonction

$$(x, y;\ \xi, \eta) = \prod \left(\frac{x_\lambda - \xi}{x_\lambda - \eta}\ \frac{y_\lambda - \eta}{y_\lambda - \xi}\right)$$

où y, ξ, η sont trois paramètres; cette fonction admet pour zéros ξ et les points homologues, pour pôles η et les points homologues; enfin elle est égale à 1 pour $x = y$. On a la formule de réciprocité

$$(x, y;\ \xi, \eta) = (\xi, \eta;\ x, y).$$

Enfin, en appelant v, α, β les valeurs de la fonction u pour y, ξ, η, on a

$$(x, y;\ \xi, \eta) = \frac{u - \alpha}{u - \beta}\ \frac{v - \beta}{v - \alpha}.$$

Si l'on pose

$$S(x;\ \xi) = \frac{AE(x, \xi)}{(x - u)(\xi - a)}, \qquad E(x, \xi) = (x - \xi)\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(\frac{x_\lambda - \xi}{x_\lambda - x}\ \frac{\xi_\lambda - x}{\xi_\lambda - \xi}\right),$$

on obtient une fonction $S(x, \xi)$ de la classe satisfaisant à la relation

$$S(x, \xi) = \frac{A(u - \alpha)}{\sqrt{u^2 + A^2\pi^2}\sqrt{\alpha^2 + A^2\pi^2}};$$

elle est représentée par le produit infini

$$S(x, \xi) = z\prod_{\lambda=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda^2}\right).$$

L'auteur passe ensuite au cas elliptique. Là encore l'égalité

$$\Sigma(x_\lambda - x') = u - u'$$

définit une fonction u de x, et les égalités

$$(x-a)(x-b)\frac{du}{dx} = \Sigma(x_\lambda - a)(x_\lambda - b) = p,$$

$$(x-a)(x-b)\frac{dp}{dx} = \Sigma(x_\lambda - a)(x_\lambda - b)(2x_\lambda - a - b) = \mathrm{P}$$

définissent deux autres fonctions p et P.

De même que dans le cas trigonométrique, la formule

$$\mathrm{V} = \Sigma \mathrm{R}(x_\lambda),$$

où la fonction rationnelle $\mathrm{R}(x)$ s'annule pour $x = a$ et $x = b$, définit une fonction de la classe s'annulant aux points singuliers. La formule

$$\mathrm{U} - \mathrm{U}' = \Sigma[\mathrm{R}(x_\lambda) - \mathrm{R}(x'_\lambda)],$$

où la fonction rationnelle $\mathrm{R}(x)$ ne devient infinie ni pour $x = a$ ni pour $x = b$, définit au contraire une fonction qui s'augmente de $\mathrm{R}(a) - \mathrm{R}(b)$ quand on passe de x à x_1; ce n'est donc pas en général une fonction de la classe.

En partant des fonctions u, p, P, p^2, ..., qui admettent $x = \infty$ et les points homologues comme pôles du 1er, 2e, 3e, 4e, ... ordre, on peut représenter sous la forme

$$\alpha u + \mathrm{F}(p) + \mathrm{PG}(p),$$

où F et G sont des polynomes, toute fonction admettant pour pôles $x = \infty$ et les points homologues, et jouissant de la propriété de se reproduire à une constante additive près quand on passe de x à x_1.

En particulier on a

$$\mathrm{P}^2 = \mathrm{R}(p),$$

R étant un polynome du troisième degré, et, de plus,

$$\frac{dx}{(x-a)(x-b)} = \frac{dp}{\sqrt{\mathrm{R}(p)}}, \qquad du = \frac{p\,dp}{\sqrt{\mathrm{R}(p)}}.$$

L'auteur définit, comme dans le cas trigonométrique, le produit infini $(x, y; \xi, \eta)$ et la fonction $\mathrm{E}(x, \xi)$. Il pose alors

$$\mathrm{S}(x, \xi) = \frac{(a-b)\,\mathrm{E}(x, \xi)}{(x-b)(\xi-a)};$$

on a

$$\mathrm{S}(x_1, \xi) = -\frac{\xi - a}{\xi - b}\,\frac{x-b}{x-a}\,\mathrm{S}(x, \xi).$$

En posant

$$z = \frac{x-a}{x-b}\,\frac{\xi-b}{\xi-a},$$

$\mathrm{S}(x, \xi)$ devient une fonction $f(z)$ satisfaisant à l'équation fonctionnelle

$$f(qz) = -\frac{f(z)}{z},$$

et l'on a tout simplement, si $|q| < 1$,

$$\mathrm{S}(x, \xi) = f(z) = \frac{\Theta(z)}{\Theta'(1)},$$

où $\Theta(z)$ est la fonction de Jacobi donnée par la formule

$$\Theta(z) = \Sigma(-1)^{\lambda} q^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}} z^{\lambda}.$$

Perron (*Oskar*). — Sur les équations différentielles linéaires à variable indépendante réelle (deuxième Communication) (25-49).

Dans la première Communication portant le même titre (même *Journal*, t. CXLII), l'auteur avait étudié la manière dont se comportent, pour $x = +\infty$, les intégrales des équations différentielles linéaires lorsque les parties réelles des racines de l'équation caractéristique sont toutes distinctes. Dans cette seconde Communication l'auteur s'occupe du cas général.

Première Partie. — *Systèmes de n équations du premier ordre.*

1. Soit

$$(1) \qquad y'_{\lambda} = \sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda,\mu}(x) y_{\mu} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

un système d'équations différentielles, où les coefficients $f_{\lambda,\mu}(x)$ sont des fonctions continues pour $x \geqq x_0$, avec

$$\lim_{x=\infty} f_{\lambda,\mu}(x) = a_{\lambda,\mu}.$$

Soient, de plus, $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les racines de l'équation caractéristique

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - \rho & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} - \rho \end{vmatrix} = 0.$$

On a un premier théorème :

Si r, s sont deux nombres réels quelconques tels que les parties réelles $\mathfrak{R}(\rho_{\lambda})$ *de toutes les racines* ρ_{λ} *soient inférieures à r et supérieures à s, on a, pour toute solution non identiquement nulle du système* (1), *les relations*

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_{\lambda}}{e^{rx}} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y_1| + |y_2| + \ldots + |y_n|}{e^{sx}} = \infty.$$

L'auteur démontre ce théorème en ramenant, par une substitution linéaire à coefficients constants effectuée sur les y_{λ}, le système (1) à la forme

$$(2) \qquad z'_{\lambda} = \rho_{\lambda} z_{\lambda} + \sum_{\mu=\lambda+1}^{n} c_{\lambda,\mu} z_{\mu} + \sum_{\mu=1}^{m} \varphi_{\lambda,\mu} z_{\mu} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n),$$

où les $c_{\lambda,\mu}$ sont des constantes et les $\varphi_{\lambda,\mu}$ des fonctions tendant vers zéro pour x infini. On peut alors trouver un nombre $x_1 > x_0$ tel qu'on ait, pour $x \geqq x_1$,

$$|z_\lambda| < C x^\lambda e^{r'x},$$

r' étant un nombre donné compris entre r et les $\mathcal{R}(\rho_\lambda)$; cela démontre la première partie du théorème. La seconde partie se ramène à la première par la considération du système adjoint

$$Y'_\lambda = -\sum_{\mu=1}^{n} f_{\lambda,\mu} Y_\mu.$$

2. L'auteur considère les systèmes particuliers de la forme (2) et démontre le théorème suivant :

Si $\mathcal{R}(\rho_1)$ est supérieur à $\mathcal{R}(\rho_\lambda)$ pour $\lambda = 2, 3, \ldots, n$, le système (2) admet une solution pour laquelle

$$\lim_{x=\infty} \frac{z_\lambda}{z_1} = 0 \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n).$$

Il y a n solutions linéairement indépendantes satisfaisant à ces conditions.

Le mode de démonstration est analogue au précédent.

3. Le théorème admet la généralisation suivante :

Si chacun des nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_k$ admet une partie réelle supérieure à la partie réelle de chacun des autres nombres ρ_λ, le système (2) admet k solutions linéairement indépendantes

$$z_1 = z_{1,\nu}, \qquad z_2 = z_{2,\nu}, \qquad \ldots, \qquad z_n = z_{n,\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

satisfaisant aux conditions

$$\lim_{x=\infty} \frac{\begin{vmatrix} z_{\lambda_1,1} & z_{\lambda_1,2} & \cdots & z_{\lambda_1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{\lambda_k,1} & z_{\lambda_k,2} & \cdots & z_{\lambda_k,k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_{1,1} & z_{1,2} & \cdots & z_{1,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{k,1} & z_{k,2} & \cdots & z_{k,k} \end{vmatrix}} = 0,$$

$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ désignant une combinaison quelconque, différente de $(1, 2, \ldots, k)$, des n indices $1, 2, \ldots, n$.

Ce théorème se ramène au précédent, les C_n^k déterminants qui s'introduisent dans l'énoncé étant C_n^k fonctions qui satisfont à un système d'équations différentielles linéaires du type du système (2).

DEUXIÈME PARTIE. — *Applications aux équations du $n^{\text{ième}}$ ordre.*

4. L'équation

$$(3) \qquad y^{(n)} + f_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + f_n(x)\, y = 0,$$

où l'on a

$$\lim_{x=\infty} f_\lambda(x) = a_\lambda,$$

se ramène d'une infinité de manières à un système de la forme (1). On peut d'abord poser

$$y = y_1, \qquad y' = y_2, \qquad \ldots, \qquad y^{(n-1)} = y_n.$$

En appliquant alors le premier théorème (n° 1), on obtient le théorème suivant :

Si les parties réelles des racines $\rho_1, \ldots, \rho_n$ de l'équation caractéristique

$$\rho^n + a_1 \rho^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

sont toutes comprises entre les deux nombres réels r et s $(r > s)$, toute intégrale non identiquement nulle de l'équation (3) satisfait aux relations

$$\lim_{x=\infty} \frac{y}{e^{rx}} = \lim_{x=\infty} \frac{y'}{e^{rx}} = \ldots = \lim_{x=\infty} \frac{y^{(n-1)}}{e^{rx}} = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \ldots + |y^{(n-1)}|}{e^{sx}} = \infty.$$

5. On peut encore poser

$$y = z_1, \qquad z_1' - \rho_1 z_1 = z_2, \qquad z_2' - \rho_2 z_2 = z_3, \qquad \ldots, \qquad z_{n-1}' - \rho_{n-1} z_{n-1} = z_n,$$

ce qui ramène l'équation (3) à un système de la forme (2). En appliquant le théorème du n° 2, on voit que :

Si $\mathcal{R}(\rho_1) > \mathcal{R}(\rho_\lambda)$ pour $\lambda = 2, 3, \ldots, n$, l'equation (3) admet n intégrales linéairement indépendantes satisfaisant aux relations

$$\lim_{x=\infty} \frac{y'}{y} = \rho_1, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y''}{y} = \rho_1^2, \qquad \ldots, \qquad \lim_{x=\infty} \frac{y^{(n)}}{y} = \rho_1^n.$$

On peut encore dire qu'il existe des équations différentielles du premier ordre

$$y' - \omega(x)\, y = 0$$

dont les intégrales satisfont à l'équation (3) et dont le coefficient $\omega(x)$ satisfait aux conditions

$$\lim_{x=\infty} \omega(x) = \rho_1, \qquad \lim_{x=\infty} \omega'(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad \lim_{x=\infty} \omega^{(n-1)}(x) = 0.$$

Sous cette dernière forme le théorème se généralise :

Si l'on considère un facteur

$$\omega(\rho) = \rho^k + c_1 \rho^{k-1} + \ldots + c_k$$

du premier membre de l'équation caractéristique, tel que chaque racine

de $\omega(\rho)$ ait sa partie réelle supérieure à celles des $n-k$ autres racines ρ_λ, il existe des équations différentielles du $k^{\text{ième}}$ ordre

$$y^{(k)} + \omega_1(x)\, y^{(k-1)} + \ldots + \omega_k(x)\, y = 0$$

dont toutes les intégrales satisfont à l'équation (3), *et dont les coefficients satisfont aux conditions*

$$\lim_{x=\infty} \omega_\lambda(x) = c_\lambda, \qquad \lim_{x=\infty} \omega'_\lambda(x) = 0, \qquad \ldots, \qquad \lim_{x=\infty} \omega_\lambda^{(n-k)}(x) = 0$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, k).$$

6. L'auteur démontre ensuite que, dans les mêmes hypothèses, *l'équation différentielle* (3) *peut se mettre sous la forme*

$$u^{(n-k)} + \varphi_1(x)\, u^{(n-k-1)} + \ldots + \varphi_{n-k}(x)\, u = 0,$$

où l'on a posé

$$u = y^{(k)} + \omega_1(x)\, y^{(k-1)} + \ldots + \omega_k(x)\, y$$

et où l'on a

$$\lim_{x=\infty} \varphi_\lambda(x) = b_\lambda,$$

avec

$$(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)\ldots(\rho - \rho_n) = \omega(\rho)\,(\rho^{n-k} + b_1 \rho^{n-k-1} + \ldots + b_{n-k}).$$

7. Tous les théorèmes précédents permettent enfin de démontrer, par voie de récurrence, le théorème fondamental suivant :

Si $r_1, r_2, \ldots, r_\sigma$ sont les parties réelles distinctes des racines de l'équation caractéristique et si e_λ est le nombre des racines dont la partie réelle est r_λ (chaque racine étant comptée avec son degré de multiplicité), l'équation différentielle (3) *admet un système fondamental d'intégrales se décomposant en σ classes, de manière que les intégrales de la $\lambda^{\text{ième}}$ classe et leurs combinaisons linéaires satisfassent aux relations*

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \ldots + |y^{(n)}|}{e^{(r_\lambda + \varepsilon)x}} = 0,$$

$$\lim_{x=\infty} \frac{|y| + |y'| + \ldots + |y^{(n-1)}|}{e^{(r_\lambda - \varepsilon)x}} = \infty,$$

et cela quelque petit que soit le nombre positif ε. Le nombre des intégrales de la $\lambda^{\text{ième}}$ classe est e_λ.

Lichtenstein (*Léon*). — I. Problèmes avec conditions aux limites de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre du type elliptique. — II. Coefficients n'admettant qu'un nombre fini de lignes de discontinuité. Le deuxième problème avec conditions aux limites. Le problème mixte (51-105).

Dans la première partie de ce Mémoire (*même Journal*, t. CXLII, p. 1-40), l'auteur s'était occupé de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre du type elliptique, en ce qui concerne le premier problème avec conditions aux limites. Dans cette deuxième partie l'auteur

revient sur ce premier problème, mais en supposant que les coefficients de l'équation admettent, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, un nombre fini de lignes de discontinuité. C'est sur la résolution de ce problème, avec ces hypothèses plus larges que celles qu'on fait habituellement, qu'il s'appuie pour résoudre le second problème et le problème mixte.

Les considérations du premier Chapitre, consacré au premier problème, reposent essentiellement sur le lemme suivant, énoncé sans démonstration :

Soit T un domaine plan limité par une courbe S fermée, sans point double, à courbure continue. Soit C un arc de courbe situé dans T, sans point double et à courbure continue; cet arc, ou bien se termine en deux points de S ou bien est tout entier à l'intérieur de T et est alors fermé. Soient enfin T_1 et T_2 les deux domaines dans lesquels C partage T, $p(x, y)$ une fonction définie dans T, admettant la seule ligne C comme ligne de discontinuité et satisfaisant à l'intérieur et sur le contour de chacun des domaines T_1 et T_2 à la condition de Hölder. On sait que le potentiel logarithmique

$$\bar{u}(x, y) = \int_{T} \int p(\xi, \eta) \log \frac{1}{r} d\xi\, d\eta, \qquad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2,$$

où (x, y) est un point de T, est continu ainsi que ses dérivées du premier ordre, dans T et sur S. *Les dérivées du second ordre, qui sont définies et continues à l'intérieur de* T_1 *et de* T_2, *admettent, à l'intérieur de* T, *la ligne* C *comme ligne de discontinuité.*

Chapitre premier. — *Le premier problème avec conditions aux limites. Coefficients admettant un nombre fini de lignes de discontinuité.*

1. *Solutions régulières.* — Soit

$$(1) \qquad L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f$$

une équation aux dérivées partielles dont les coefficients a, b, c, f sont supposés, ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre, continus dans chacun des domaines T_1 et T_2, contour compris, mais pour lesquels C est une ligne de discontinuité.

L'auteur cherche à déterminer une solution $u(x, y)$ de cette équation, bornée et continue dans T, admettant des dérivées partielles des deux premiers ordres continues dans T, sauf peut-être sur C, prenant sur S une suite de valeurs $\varphi(s)$ continue, sauf en un nombre fini de points, telle enfin que la dérivée $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ prise le long d'une normale à C soit continue dans toute partie de C complètement continue dans T.

Une telle solution satisfait à l'équation intégrale

$$\begin{aligned}(2) \qquad u(x, y) = &-\frac{1}{2\pi}\int_{T}\int \left[\frac{\partial(aG)}{\partial\xi} + \frac{\partial(bG)}{\partial\eta} - cG\right] u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_{C} G(x, y; \xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, [\delta b\, d\xi - \delta a\, d\eta] \\ &+ v(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int_{T}\int G(x, y; \xi, \eta)\, f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,\end{aligned}$$

où $v(x, y)$ désigne la fonction potentielle, régulière dans T, qui prend sur S les valeurs données $\varphi(s)$, où $G(x, y; \xi, \eta)$ désigne la fonction ordinaire de

Green relative au domaine T, où enfin δa et δb désignent les variations brusques de a et b quand on traverse la courbe C.

Si l'équation $L(u) = 0$ admet des solutions s'annulant sur S, ces solutions satisfont à l'équation intégrale homogène correspondant à (2).

Réciproquement, toute solution de l'équation intégrale (2) est continue, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, dans T; de plus les dérivées partielles du second ordre sont continues dans T, sauf sur C.

En appelant *régulières* les solutions continues dans T, admettant des dérivées du premier ordre continues dans T et des dérivées du second ordre également continues sauf en un nombre fini de lignes de discontinuité, on voit que l'équation (1) admet encore des solutions régulières si les coefficients a, b, c, f admettent une ligne de discontinuité (et même un nombre fini de ces lignes, pourvu qu'il ne passe pas plus de deux de ces lignes en un même point).

L'auteur démontre que si la suite de fonctions continues

$$\varphi^{(1)}(s), \qquad \varphi^{(2)}(s), \qquad \ldots$$

converge uniformément vers $\varphi(s)$ sur tout arc de S qui ne contient aucun point de discontinuité de $\varphi(s)$, et si $u^{(k)}(x, y)$ est la solution régulière de (1) qui prend sur S les valeurs $\varphi^{(k)}(s)$, on a

$$\lim_{k=\infty} u^{(k)}(x, y) = u(x, y),$$

le passage à la limite étant uniforme dans toute partie T* de T qui ne contient aucun point de discontinuité de $\varphi(s)$.

2. *Solutions régulières* (*suite*). — Soit $u_0(x, y)$ la solution, régulière dans T, de l'équation (1) (ou de l'équation homogène correspondante) qui s'annule sur S. Si l'on suppose pour un instant que $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, $\frac{\partial u_0}{\partial y}$ sont continues, non seulement dans T, *mais encore sur* S, et si l'on pose

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} = f - a\frac{\partial u_0}{\partial x} - b\frac{\partial u_0}{\partial y} - c u_0 = W(x, y),$$

on obtient pour $W(x, y)$ l'équation intégrale

$$(3) \qquad W(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int_T\int \Big[a(x, y)\frac{\partial}{\partial x} G(x, y; \xi, \eta) + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y} G(x, y; \xi, \eta) + c(x, y) G(x, y; \xi, \eta)\Big] \times W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = f(x, y),$$

d'où l'on tire ensuite

$$(4) \qquad u_0(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_T\int G(x, y; \xi, \eta) W(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Les formules (3) et (4) fournissent ainsi, d'une nouvelle manière, la solution (unique) du premier problème avec conditions aux limites, et l'on voit que $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, $\frac{\partial u_0}{\partial y}$ sont effectivement continues sur S.

De là résulte facilement la continuité *sur* S de $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, lorsque la fonction $\varphi(s)$ admet une dérivée $\varphi'(s)$ continue et une dérivée $\varphi''(s)$ continue, sauf en un nombre fini de points.

Si l'équation non homogène (1) n'admettait pas une solution unique, la conclusion précédente s'appliquerait aux solutions de l'équation homogène correspondante.

L'auteur suppose enfin que $\varphi(s)$ dépende d'un paramètre λ variant dans un intervalle (λ_0, λ_1). Si $\varphi(s, \lambda)$ est une fonction continue de ses deux arguments, $u(x, y, \lambda)$ est une fonction continue pour tous les points (x, y) de T et de S et pour toutes les valeurs λ de l'intervalle (λ_0, λ_1). Si, en outre, $\varphi(s, \lambda)$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ continue, les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \lambda}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial \lambda}$ existent et sont continues par rapport à (x, y); de plus les dérivées partielles $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial \lambda}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial \lambda}$, $\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial \lambda}$ existent dans T et, par rapport à (x, y), n'admettent qu'un nombre fini de lignes de discontinuité.

3. *Théorèmes d'unicité.* — Dans le cas particulier où $c = 0$, *et où les lignes de discontinuité ne se coupent ni ne se touchent à l'intérieur de* T, toute solution régulière de l'équation (1) ne peut admettre ni maximum positif ni minimum négatif. Par suite, *toute solution régulière en* T *et s'annulant sur* S *est identiquement nulle dans* T.

Laissons maintenant tomber la condition $c = 0$. On peut alors trouver un nombre k tel que, si T^* désigne un domaine quelconque contenu dans T et tout entier situé à l'intérieur d'une bande de largeur k parallèle à Ox ou à Oy, l'équation $L(u) = 0$ n'admet aucune solution non identiquement nulle, régulière dans T^* et nulle sur S.

Il y a un cas particulier simple où l'on est encore sûr de l'unicité de la solution : c'est quand le domaine T est un cercle de rayon suffisamment petit, et cela même si les lignes de discontinuité se coupent ou se touchent.

4. *Les solutions regardées comme fonctions des coefficients.* — Supposons que les coefficients a, b, c, f de l'équation (1) dépendent d'un paramètre λ; soient des fonctions continues de (x, y) dans T et sur S et des fonctions continues de λ dans l'intervalle (λ_1, λ_2). Supposons qu'ils admettent des dérivées partielles continues par rapport à (x, y) et que l'équation (1) n'admette, quel que soit λ, aucune solution régulière dans T et nulle sur S. Soient enfin $\varphi(s, \lambda)$ une fonction continue sur S et $u(x, y, \lambda)$ la solution de l'équation (1) régulière dans T et prenant sur S les valeurs $\varphi(s, \lambda)$. Dans ces conditions $u(x, y, \lambda)$ est une fonction continue de ses trois arguments dans T, sur S et dans l'intervalle (λ_1, λ_2); de plus, dans tout domaine T′ intérieur à T et dans l'intervalle (λ_1, λ_2), les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sont des fonctions continues de x, y et λ.

5. *Théorèmes d'unicité* (*suite*). — L'auteur revient à l'hypothèse $c < 0$, mais en ne supposant plus que les lignes de discontinuité ne se coupent ni ne se touchent. Dans ces conditions, il est encore vrai que toute solution de $L(u) = 0$, régulière dans T et nulle sur S, est identiquement nulle sur S. Plus généralement, tous les résultats énoncés au n° 3 s'étendent au cas où les lignes de discontinuité se coupent ou se touchent.

6. *La fonction de Green nulle sur le contour.* — L'auteur revient aux hypothèses initiales, qu'il complète toutefois en supposant que $\frac{\partial a}{\partial x}$ et $\frac{\partial b}{\partial y}$ satisfont à la condition de Hölder à l'intérieur et sur le contour de chacun des domaines T_1 et T_2 dans lesquels C partage T.

L'équation adjointe de $L(u) = 0$ est

$$M(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial b}{\partial y}\right)u = 0.$$

Soit (X, Y) un point quelconque de T et supposons que dans T le premier problème aux limites admette une solution et une seule, soit pour $L(u) = 0$, soit pour $M(u) = 0$. Soient alors

$$\mathcal{G}(X, Y; x, y) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}(X, Y; x, y)$$

les solutions (fonctions de Green) de ces deux équations s'annulant sur le contour. La première, par exemple, est fournie par les formules

$$\mathcal{G}(X, Y; x, y) = G(X, Y; x, y) - \frac{1}{2\pi}\int_{T_1}\int G(x, y; \xi, \eta)\,\mathfrak{W}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

$$\mathfrak{W}(x, y) - \frac{1}{2\pi}\int_{T_1}\int\Big[\,a(x, y)\frac{\partial}{\partial x}G(x, y; \xi, \eta) + b(x, y)\frac{\partial}{\partial y}G(x, y; \xi, \eta) + c(x, y)\,G(x, y; \xi, \eta)\Big] \times \mathfrak{W}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = -L[G(X, Y; x, y)].$$

On voit ainsi que $\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}$ sont continues sur S.

La relation de réciprocité entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ est ici moins simple que dans le cas où les coefficients sont continus; elle s'exprime par la formule

$$\mathcal{G}(x_2, y_2; x_1, y_1) - \mathcal{H}(x_1, y_1; x_2, y_2) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \mathcal{H}(x_1, y_1; \xi, \eta)\,\mathcal{G}(x_2, y_2; \xi, \eta)\,(\delta a\,d\eta - \delta b\,d\xi).$$

A l'aide de ces fonctions la solution $u(x, y)$, régulière dans T, de l'équation (1), qui prend sur S des valeurs données $\varphi(s)$, est fournie par l'équation

$$u(X, Y) = -\frac{1}{2\pi}\int_C \mathcal{H}(X, Y; \xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,(\delta a\,d\eta - \delta b\,d\xi) + \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\mathcal{H}(X, Y; t)\,\varphi(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{T_1}\int \mathcal{H}(X, Y; \xi, \eta)\,f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.$$

E. Cartan.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA [1].

Série III, Tome I, 1898.

(A la suite de la mort de F. Brioschi, directeur des *Annali*, commence une troisième série de ce Recueil, dirigé désormais par MM. Beltrami, Cremona, Dini et Jung.)

Tedone (*O.*). — Sur l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \sum_1^m {}_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0$$

(1-24).

Pour $m = 3$, l'équation considérée est l'équation bien connue de l'Optique; il existe une formule de Kirchhoff relative à cette équation, formule qui est la traduction analytique du principe d'Huygens. Dans des travaux antérieurs, M. Volterra (pour le cas de $m = 2$), puis l'auteur (pour le cas de $m = 3$) ont établi des formules plus générales par une méthode qui est en un certain sens la généralisation de la méthode des caractéristiques de Riemann. Dans le Mémoire actuel, l'auteur étend la même méthode au cas où m est quelconque.

Rosati (*C.*). — Représentation de la quartique base d'un faisceau de quadriques de l'espace S_n sur un espace S_{n-2} (25-37).

Le complexe quadratique général de l'espace à trois dimensions S_3 est représentable en projetant sur S_3 la quartique base d'un faisceau de quadriques de l'espace à cinq dimensions. L'auteur étend ce procédé, tel que l'a exposé M. Bertini dans ses Leçons, à la quartique base d'un faisceau d'un espace S_n à n dimensions, quartique qu'on peut représenter d'une façon biunivoque sur un espace S_{n-2}.

Dini (*U.*). — Une application de la théorie des résidus de fonctions de variables complexes (39-76).

Ce Mémoire en complète un autre publié par l'auteur au même moment et sous le même titre dans les *Memorie dell'Accademia dei Lincei*.

Les applications de la théorie des résidus envisagées ici par l'auteur résultent de la remarque suivante : Soit une fonction $f(z, \xi)$ de deux variables qui, considérée comme fonction de z, est uniforme dans le voisinage du point $z = 0$ pour toutes les valeurs de ξ considérées et admet ce point comme point régulier, comme pôle ou comme point singulier essentiel isolé : le coefficient de z^n (n positif, négatif ou nul) dans le développement de $f(z, \xi)$ suivant les puis-

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, ce Tome, p. 5-10.

sances de z est égal au résidu pour $z = 0$ de la fonction $\frac{f(z, \xi)}{z^{n+1}}$, résidu qui peut être remplacé par une intégrale prise le long d'un contour convenablement choisi entourant le point $z = 0$.

L'auteur applique cette remarque au cas où l'on a

$$f_1(z, \xi) = (a_0 z^2 + a_1 z + a_1)^\mu$$

ou encore

$$f_2(z, \xi) = \log(a_0 z_2 + a_1 z + a_2),$$

a_0, a_1, a_2 étant des fonctions de ξ et μ un nombre quelconque. Le cas particulier $\mu = -\frac{1}{2}$, $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = -2\xi$ fournit le polynome $X_n(\xi)$ de Legendre. En général, soit $Z_{\mu,n}$ le coefficient de z^n dans le développement de $f_1(z, \xi)$ et Z_n le coefficient de z^n dans le développement de $f_2(z, \xi)$. L'auteur, partant du principe rappelé plus haut, obtient diverses formules exprimant $Z_{\mu,n}$ ou Z_n par des intégrales définies. Comme cas particulier, il retrouve diverses expressions bien connues de la fonction de Legendre sous forme d'intégrale définie. Certaines formules relatives à cette dernière fonction sont ainsi étendues aux fonctions $Z_{-p-\frac{1}{2},n}$ (p entier) et dans certains cas même aux fonctions plus générales $Z_{\mu,n}$ (μ réel ou complexe).

Dini (*U.*). — Un théorème sur la limite inférieure ou supérieure des modules des racines d'une équation algébrique (77-81).

Étant donnée l'équation

$$(1) \qquad a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m = 0,$$

soient a'_0, a'_1, ..., a'_m les modules des coefficients.

La racine positive unique de l'équation

$$a'_0 z^m - a'_1 z^{m-1} - a'_2 z^{m-2} - \ldots - a'_{m-1} z - a'_m = 0$$

est une limite supérieure des modules des racines de l'équation (1) ou bien est égale au plus grand de ces modules.

De même, la racine positive de l'équation

$$a'_0 z^m + a'_1 z^{m-1} + \ldots + a'_{m-1} z - a'_m = 0$$

est une limite inférieure des modules des racines de l'équation (1) ou bien est égale au plus petit de ces modules.

Cazzaniga (*T.*). — Sur un type de déterminants nuls d'ordre infini (83-94).

Ce Mémoire complete l'étude des déterminants d'ordre infini publiée par l'auteur au Tome XXVI des *Annali*.

Un déterminant d'ordre infini, dont les éléments vérifient l'inégalité

$$a_{ik} \leqq \frac{A}{r^i s^k}, \qquad rs > 1,$$

où A, r, s sont trois nombres positifs fixes, sera dit déterminant du type $\mathfrak{Z}$. Un pareil déterminant est nul.

Un déterminant du type $\mathfrak{Z}$ continue à converger vers zéro après qu'il a été bordé par p lignes d'éléments α_{ik} vérifiant les inégalités

$$|\alpha_{ik}| \leqq k^{n_i k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, p;\ k = 1, 2, \ldots, \infty)$$

et par q colonnes d'éléments β_{ik} vérifiant les inégalités

$$|\beta_{ik}| \leqq i^{m_k i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty;\ k = 1, 2, \ldots, q),$$

où les n_i et les m_k sont des nombres fixes. Un pareil déterminant sera dit appartenir au type $\mathfrak{Z}'$.

Un exemple de déterminant du type $\mathfrak{Z}'$ est fourni par le déterminant infini de Vandermonde formé avec les puissances des nombres

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \quad \ldots$$

d'un ensemble dénombrable, sous l'hypothèse que le plus grand nombre de l'ensemble dérivé soit inférieur à 1.

L'auteur donne ensuite des conditions suffisantes que doivent remplir les éléments a_{ik} d'un déterminant d'ordre infini pour que ce déterminant appartienne au type $\mathfrak{Z}$ ou au type $\mathfrak{Z}'$. Ces conditions font intervenir l'ensemble des rayons de convergence des séries

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} a_{ik} x^k \qquad (i = 1, 2, \ldots, \infty)$$

et l'ensemble des rayons de convergence des séries

$$\sum_{i=1}^{i=\infty} a_{ik} x^i \qquad (k = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Le développement d'un déterminant $\mathfrak{Z}$ suivant les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne donne lieu à une égalité illusoire, car tous les coefficients de ce développement sont nuls ainsi que $\mathfrak{Z}$ lui-même. Mais, si l'on pose

$$\alpha_{ik} = \lim_{m=\infty} \frac{A_{ik}^{(m)}}{\mathfrak{Z}_m},$$

où $A_{ik}^{(m)}$ est le mineur relatif à a_{ik} dans le déterminant $\mathfrak{Z}_m$ formé avec les m premières lignes et les m premières colonnes de $\mathfrak{Z}$, on aura

$$\sum \alpha_{ik} a_{ik} = 1, \qquad \sum \alpha_{ik} a_{ih} = 0,$$

sous certaines hypothèses posées par l'auteur. Sous ces mêmes hypothèses, la résolution d'un système d'équations linéaires en nombre infini admettant $\mathfrak{Z}$ comme déterminant sera possible.

La règle de multiplication des déterminants subsiste aussi pour les déterminants $\mathfrak{Z}$ sous certaines hypothèses précisées par l'auteur.

Timerding (*H.-E.*). — Sur la transformation quadratique qui transforme les plans de l'espace en un système de surfaces du second ordre ayant un tétraèdre polaire commun (95-135) (en allemand).

Le Mémoire de M. Timerding est consacré à l'étude de la transformation quadratique définie par les équations

$$(1) \qquad \rho X_1 = x_1^2, \quad \rho X_2 = x_2^2, \quad \rho X_3 = x_3^2, \quad \rho X_4 = x_4^2.$$

Cette transformation fait correspondre au plan

$$a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 = 0$$

de l'espace (X) la surface du second ordre

$$(2) \qquad a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2 = 0$$

de l'espace (x). Lorsque le plan varie, les surfaces du second ordre correspondantes ont un tétraèdre polaire commun, le tétraèdre de référence.

Ce Travail comprend quatre Parties :

Première Partie. — *Sur les surfaces du second ordre ayant un tétraèdre polaire commun.* — Étude géométrique de ces surfaces. Propriétés de ces surfaces relatives à la transformation (1). A une droite de l'espace (X) correspond en général une biquadratique gauche de l'espace (x) ; à une droite de l'espace (x) correspond en général dans l'espace (X) une conique tangente aux quatre faces du tétraèdre fondamental. Cas singuliers où la droite donnée de l'espace (X) ou de l'espace (x) s'appuie sur une arête du tétraèdre, passe par un sommet du tétraèdre ou enfin est située dans une face du tétraèdre.

Seconde Partie. — *Sur une famille de surfaces particulières du quatrième ordre.* — A une surface du second ordre F_2 de l'espace (X) correspond dans l'espace (x) une surface f_4 du quatrième ordre. A une surface F_2 tangente à une face du tétraèdre correspond une surface f_4 admettant quatre points coniques. A une surface F_2 tangente aux quatre faces du tétraèdre correspond donc une surface f_4 admettant seize points coniques : c'est le *tétraédroïde* de Cayley, généralisation projective de la surface des ondes de Fresnel. Propriétés de cette surface déduites de là. Étude par la même méthode des surfaces suivantes : 1° surface f_4 correspondant à un hyperboloïde F_2 contenant une, deux ou trois arêtes du tétraèdre fondamental; 2° surfaces f_4 à conique double, surfaces qui correspondent aux cônes tangents à une face du tétraèdre fondamental; 3° surfaces *desmiques* homologues dans l'espace (x) d'un cône D_2 de l'espace (X) circonscrit au tétraèdre fondamental.

Troisième Partie. — *La surface de Steiner.* — A un plan (ε) de l'espace (x) correspond dans l'espace (X) une surface de Steiner (E). L'équation du plan peut être ramenée à la forme

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

et, par suite, on peut mettre l'équation de la surface de Steiner sous la

forme

$$\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}+\sqrt{X_3}+\sqrt{X_4}=0.$$

A cette dernière surface correspondent d'ailleurs les huit plans

$$x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0.$$

Les propriétés bien connues de la surface résultent de la transformation (1). Par exemple, il existe une infinité de quadriques du faisceau (2) tangentes au plan (ε); chacune de ces quadriques coupe le plan (ε) suivant deux droites; à ces quadriques correspondent les plans tangents de la surface (E) et, par suite, chacun de ces plans tangents coupe la surface suivant deux coniques tangentes aux quatre faces du tétraèdre fondamental. L'auteur fait ainsi une étude complète de la surface de Steiner. Représentation paramétrique par les équations

$$\frac{Y_1}{2\eta_2\eta_3}=\frac{Y_2}{2\eta_3\eta_1}=\frac{Y_3}{2\eta_1\eta_2}=\frac{Y_4}{\eta_1^2+\eta_2^2-\eta_3^2},$$

d'où la forme très simple

$$Y_2^2Y_3^2+Y_3^2Y_1^2+Y_1^2Y_2^2=2Y_1Y_2Y_3Y_4$$

de l'équation de la surface donnée par Kummer. Transformation de la surface en elle-même par un groupe de 24 transformations linéaires, groupe qui transforme en lui-même le quadrilatère de section du tétraèdre par le plan (ε), image de la surface.

Quatrième Partie. — *Les courbes gauches du quatrième ordre et de première espèce.* — Une pareille courbe correspond dans l'espace (x) à une droite g de l'espace (X). Les quatre cônes du second ordre passant par la courbe correspondent aux quatre plans passant par la droite et respectivement par les quatre sommets du tétraèdre fondamental. Étude de la développable admettant la biquadratique comme arête de rebroussement; à cette développable correspond dans l'espace (X) la surface du quatrième ordre engendrée par les coniques tangentes à la droite g et aux quatre faces du tétraèdre fondamental; ces dernières coniques sont des courbes d'un complexe tétraédral; étude de ce complexe tétraédral dans ses rapports avec les biquadratiques gauches précédemment définies.

Bagnera (G.). — Composition des groupes finis dont le degré est la cinquième puissance d'un nombre premier (137-228).

Ce Travail est consacré à la classification et au mode de composition de tous les groupes de degré p^5, où p est un nombre premier. L'exposant 5 présente un intérêt particulier, parce que c'est à partir de $\nu = 5$ seulement que le nombre des groupes de degré p^ν dépend de la valeur de p; pour ν inférieur à 5, ce nombre est au contraire le même, quel que soit p.

Après avoir retrouvé les groupes de degré p^3 et p^4 déjà formés par Hölder et par Young, l'auteur s'occupe de la classification complète de tous les groupes de degré p^5. Les conclusions de cette étude sont les suivantes : Les groupes possibles de degré 2^5 ou 32 sont au nombre de 50; les groupes de degré 3^5

ou 243 sont au nombre de 66; le nombre des groupes de degré p^5, lorsque p est supérieur à 3, est l'un des nombres

$$2p+65, \qquad 2p+67, \qquad 2p+69, \qquad 2p+71,$$

le nombre premier p vérifiant respectivement dans chacun de ces cas l'une des quatre congruences

$$p \equiv -1, \qquad p \equiv 5, \qquad p \equiv -5, \qquad p \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 12).$$

Medolaghi (*P.*). — Classification des équations aux dérivées partielles du second ordre qui admettent un groupe infini de transformations ponctuelles (229-263).

Dans ce Mémoire se trouvent traités les deux problèmes suivants : 1° Déterminer tous les types de groupes infinis de transformations ponctuelles à trois variables; 2° pour chacun de ces types, déterminer les équations aux dérivées partielles du second ordre invariantes par les transformations du groupe.

L'auteur réduit le premier problème en remarquant que tout groupe infini contient au moins un sous-groupe infini contenant une fonction arbitraire d'un seul argument x_1, sous-groupe dont la transformation infinitésimale est réductible par un changement de variables à la forme

$$(1) \qquad \xi(x_1)X_0 + \sum_{i=1}^{s} \frac{d^i\xi}{dx_1^i} X_i,$$

où $X_0, X_1, \ldots, X_s$ sont des transformations infinitésimales déterminées; ce groupe (1) ne peut contenir lui-même aucun sous-groupe infini.

Le premier problème est donc ramené à la détermination de tous les groupes à trois variables x_1, x_2, x_3 de la forme (1). Ces groupes sont ou bien isomorphes au groupe $\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x}$, ou bien isomorphes au groupe $\xi(x)\frac{\partial f}{\partial y}$. L'auteur, en partant de ces résultats, dont il ne donne pas ici la démonstration, obtient successivement tous les types de groupes de l'une ou l'autre catégorie. Ces types une fois obtenus, on obtient les équations aux dérivées partielles invariantes par les transformations de l'un des groupes en cherchant pour le groupe considéré les invariants différentiels d'ordre égal ou inférieur à 2 et en établissant une relation arbitraire entre ces invariants différentiels, ce qui conduit chaque fois à l'intégration d'un système complet. Les calculs sont effectués complètement par l'auteur pour chacun des types de groupes obtenus précédemment.

Krause (*M.*). — Sur des systèmes d'équations différentielles vérifiés par les fonctions quadruplement périodiques de seconde espèce (265-282) (en allemand).

Après avoir défini certaines fonctions quadruplement périodiques formées avec des fonctions thêta de deux variables, l'auteur montre que ces fonctions vérifient des équations différentielles à coefficients quadruplement périodiques.

Ces équations interviennent dans divers problèmes de Mécanique ou de Physique mathématique.

Tedone (*O.*). — Sur un système général d'équations qu'on peut intégrer par la méthode des caractéristiques (283-312).

Soient $u_1, u_2, \ldots, u_m$ un système de m fonctions des $m+1$ variables $x, x_1, x_2, \ldots, x_m$. Posons

$$\theta = \sum_1^m i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \qquad \varpi_{hk} = \frac{\partial u_h}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_h}.$$

Le système envisagé par l'auteur est alors le suivant :

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial \theta}{\partial x_l} - a^2 \sum_1^m i \frac{\partial \varpi_{l,i}}{\partial x_i} - X_l = 0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, m),$$

où les X_l sont des fonctions régulières données. Si x représente le temps et si $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont les coordonnées d'un point d'un espace à m dimensions, les équations précédentes sont les équations du mouvement d'un corps élastique et isotrope dans cet espace; les quantités u_i sont alors les composantes du déplacement, θ est le coefficient de dilatation et les quantités $\varpi_{h,k}$ sont les rotations du corps solide autour des droites d'intersection des plans de coordonnées pris deux à deux.

La méthode employée est basée sur une formule qui est l'extension à l'espace considéré de la formule de Green. Elle permet d'obtenir diverses intégrales particulières du système proposé et de traiter divers problèmes au contour relatifs à cette équation.

Montesano (*D.*). — Une extension du problème de la projectivité à des groupes de complexes ou de congruences linéaires de droites (313-357).

Ce Mémoire contient la solution des questions suivantes :

1° Étant donnés dans l'espace μ complexes linéaires de droites $K_1, K_2, \ldots, K_\mu$, étudier le système des faisceaux de droites de l'espace pour lesquels les rayons $r_1, r_2, \ldots, r_\mu$ appartenant respectivement aux complexes donnés forment un groupe déduit projectivement d'un groupe donné de μ éléments d'une forme géométrique fondamentale de première espèce (pour $\mu = 4, 5, 6, 7, 8$).

2° Étant données dans un complexe linéaire ν congruences linéaires $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\nu$, étudier le système des faisceaux de rayons du complexe pour lesquels les rayons $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ appartenant respectivement aux ν congruences données forment un groupe déduit projectivement d'un groupe donné de ν éléments d'une forme géométrique fondamentale de première espèce (pour $\nu = 4, 5, 6$).

3° Étant donnés cinq complexes linéaires $K_1, K_2, \ldots, K_5$, étudier la courbe lieu d'un point auquel correspondent dans les complexes donnés cinq plans formant un groupe déduit homographiquement d'un groupe donné de cinq

plans $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_5$ passant par un même point et établir les propriétés de la congruence linéaire formée par toutes les courbes du type ainsi défini.

De l'étude de ces questions, l'auteur déduit, entre autres résultats, diverses propriétés des groupes de cinq ou six droites appartenant à la surface générale du troisième ordre, ainsi que diverses propositions de géométrie énumérative.

Série III, t. II, 1899.

Almansi (*E.*). — Sur l'intégration de l'équation différentielle $\Delta^{2n} = 0$ (1-51).

Étant donnée une fonction f d'un nombre quelconque de variables, on désignera par $\Delta^{2n} f$ la fonction obtenue en appliquant n fois successivement à la fonction f l'opération

$$\Delta^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \ldots,$$

de sorte que

$$\Delta^4 f = \Delta^2 \Delta^2 f, \qquad \Delta^6 f = \Delta^2 \Delta^2 \Delta^2 f, \qquad \ldots.$$

L'auteur démontre la proposition suivante :

« Une fonction régulière dans un certain espace et vérifiant dans cet espace l'équation $\Delta^{2n} = 0$ peut être représentée en général à l'aide de n fonctions régulières dans le même espace et dont chacune vérifie l'équation $\Delta^2 = 0$. »

D'une façon plus précise, une pareille fonction φ_n peut se mettre sous la forme

$$\varphi_n = p^{(n-1)} \varphi_1' + p^{(n-2)} \varphi_1'' + \ldots + p_1 \varphi_1^{n-1} + \varphi_1^n,$$

où $\varphi_1', \varphi_1'', \ldots, \varphi_1^n$ sont des fonctions vérifiant $\Delta^2 = 0$ et où $p^{(i)}$ désigne soit le produit de i fonctions linéaires de x, y, z, soit le produit de i facteurs de la forme

$$p = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$$

les constantes R^2 ayant des valeurs quelconques.

De cette proposition, qui constitue le point fondamental de ce Mémoire, l'auteur déduit de nombreuses applications.

Il l'applique d'abord à l'équation

$$\Delta^4 \Phi = 0,$$

à trois variables x, y, z. Il détermine la solution de cette équation qui, pour $z = 0$, se réduit à une fonction donnée, les dérivées partielles $\frac{\partial \Phi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \frac{\partial^3 \Phi}{\partial z^3}$ se réduisant aussi pour $z = 0$ à des fonctions données de x, y.

Il détermine ensuite pour la même équation la solution, régulière à l'intérieur d'un cercle donné, assujettie à prendre une valeur donnée u_0 sur le contour, la dérivée suivant la normale intérieure prenant une valeur donnée u_1. Par une méthode analogue, il traite le cas où, au lieu d'un cercle, on prend comme domaine de définition la couronne comprise entre deux cercles concentriques.

Parmi les autres problèmes aux limites traités par la même méthode, signalons la recherche d'une fonction ψ régulière dans un domaine donné de l'espace et vérifiant l'équation $\Delta^4\psi = 0$, lorsque l'on connaît sur la surface qui limite le domaine les valeurs de ψ et de $\Delta^2\psi$.

Dans le reste du Mémoire, l'auteur applique sa méthode et les résultats qu'il en a déduits à divers problèmes d'Élasticité dans lesquels intervient l'équation $\Delta^4\varphi = 0$.

Ciani (*E.*) — Les bitangentes de la quartique plane étudiées à l'aide de la configuration de Kummer (53-94).

Par une quartique plane donnée, on peut faire passer ∞^1 surfaces de Kummer. Les propriétés de la configuration de Kummer fournissent des propriétés des bitangentes de la quartique. C'est à ce point de vue que se place l'auteur pour étudier les bitangentes de la courbe.

Bianchi (*L.*). — Quelques recherches de géométrie non euclidienne (95-126).

Dans ce Mémoire, l'auteur cherche à étendre la méthode de Weingarten à la géométrie des espaces à courbure constante. Il part pour cela de l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q}(r_1 + r_2) + \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} r_1 r_2 = 0,$$

qui intervient dans la méthode habituelle de Weingarten. Des surfaces intégrales de (A) on déduit une classe complète de surfaces applicables.

Si l'on effectue la représentation conforme de l'espace considéré sur l'espace euclidien, les surfaces transformées vérifient aussi une même équation de la forme (A) et constituent par suite une même classe de Weingarten; on trouve ainsi une famille de surfaces applicables de l'espace euclidien qu'on pourrait obtenir directement.

L'auteur étudie plus particulièrement les surfaces de l'espace hyperbolique qui vérifient l'équation

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \pm\frac{2}{R}$$

et celles qui vérifient l'équation

$$r_1 + r_2 = \pm 2R,$$

la courbure de l'espace étant représentée par $-\frac{1}{R^2}$. Ces surfaces généralisent les surfaces minima de l'espace euclidien.

Si l'on transporte les résultats dans l'espace euclidien, les homologues des surfaces (B) dans ce dernier espace constituent une classe de surfaces à lignes de courbures isothermes que l'auteur détermine sous forme finie. Cette famille de surfaces est caractérisée par la propriété suivante :

« En un point M de la surface, menons le cercle normal à la surface et à un plan fixe $z = 0$ et soient A, A' les points où le cercle coupe le plan. Si, au point M de la surface, on fait correspondre le point A ou le point A' du plan, on obtient deux représentations de la surface. Les surfaces considérées et les

sphères sont les seules surfaces pour lesquelles l'une de ces deux représentations conserve les angles. »

Levi (*B.*). — Sur la composition des points quelconques des lignes singulières des surfaces algébriques (127-138).

Ce Mémoire constitue un appendice au Mémoire du même auteur sur la réduction des singularités ponctuelles des surfaces algébriques, publié au Tome XXVI (série II) des *Annali*. L'auteur y démontre un point particulier qu'il avait énoncé sans démonstration dans le Mémoire précédent relativement au cas où le nombre des points multiples d'ordre s désignés par $A_1, A_2, \ldots$ dans ce Mémoire peut croître indéfiniment.

Cifarelli (*F.*). — Les congruences (139-154).

Étude des congruences de droites, en supposant qu'une droite quelconque de la congruence est définie par les coordonnées x, y, z d'un de ses points et par ses cosinus directeurs, ces six quantités étant fonctions de deux paramètres u, v. Dans cette étude s'introduisent les formes différentielles ΣdX^2, $\Sigma dX\,dx$, Σdx^2. Les coefficients de ces formes, ordonnées en du, dv, doivent vérifier un système d'équations aux dérivées partielles que l'auteur établit; il traite aussi de la réduction des formes différentielles précédentes à certaines formes canoniques par un changement de paramètre.

Scorza (*G.*). — Sur la théorie des figures polaires des courbes planes du quatrième ordre (155-202).

Après avoir repris la théorie générale des figures polaires en partant du point de vue de Reye (*Journal de Crelle*, t. 72, 78, 79, 82), l'auteur considère d'une façon spéciale les figures polaires des quartiques planes.

Un *p-latère* polaire d'une courbe C de degré n est un système de p droites telles que l'équation de C puisse s'obtenir par une combinaison linéaire et homogène des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des formes linéaires qui, égalées à zéro, représentent les équations de p droites. Pour une quartique générale, le nombre minimum des côtés d'un polylatère polaire est égal à 6. Après avoir étudié les cas où ce nombre minimum est inférieur à 6, ce qui a lieu pour des quartiques particulières, l'auteur étudie le cas général : il y a alors des p-latères pour toute valeur de p comprise entre 6 et 14.

Sabinine (*G.*). — Sur les formules qui servent à représenter la variation d'une intégrale définie multiple sous la forme propre aux applications (203-227) (en français).

Étant donnée l'intégrale définie multiple

$$u = \int v\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_i,$$

où v est une fonction des variables d'intégration $x_1, x_2, \ldots, x_i$ et des fonctions

inconnues $y_1, y_2, \ldots, y_r$ de ces variables, l'auteur donne deux formules servant, sous certaines hypothèses, à représenter la variation δu sous une forme propre à l'application à la question du maximum ou du minimum de l'intégrale u

Cazzanigga (*T.*). — Notes sur la multiplication des déterminants normaloïdes (229-238).

Le déterminant d'ordre infini

$$D = [a_{ik}] \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \ldots, \infty \\ k = 1, 2, 3, \ldots, \infty \end{pmatrix}$$

est dit *normaloïde* si l'on peut déterminer une suite de nombres $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tels que le déterminant

$$D' = \left[\frac{x_i}{x_k} a_{ik}\right]$$

soit un déterminant normal, au sens défini par M. von Koch.

L'auteur a déjà envisagé ces déterminants dans un Mémoire que nous avons analysé (*Annali di Matematica*, série II, t. XXVI). Dans le travail actuel, il revient sur la question et il montre que la règle de multiplication des déterminants ne subsiste pas toujours pour des déterminants normaloïdes, contrairement à une assertion de M. von Koch, et il précise certains cas où la règle est exacte. Il démontre ensuite la proposition suivante :

« Soient x_r, y_r des nombres tels que le produit infini

$$P = \prod_{r=1}^{\infty} \frac{x_r}{y_r}$$

soit absolument convergent. Si un déterminant infini

$$D = [a_{ik}]$$

est tel que le déterminant

$$D' = \left[\frac{x_i}{y_k} a_{ik}\right]$$

soit normal, D est convergent et a pour valeur

$$D = PD'. »$$

Le déterminant D sera dit *normaloïde généralisé*. Suivent quelques propositions relatives à ces normaloïdes généralisés.

Timerding (*H.-E.*). — Sur un système nul quadratique (239-261) (en allemand).

On appelle système nul, d'une façon générale, une transformation géométrique dans laquelle à un point correspond un plan passant par le point et, réciproquement, à un plan correspond un point situé dans ce plan. Le système nul étudié par l'auteur est défini de la façon suivante :

« Étant donnée une quadrique à centre, on fait correspondre à tout plan de

l'espace le centre de la section de la quadrique par ce plan et, réciproquement, à tout point de l'espace le plan de la section plane de la quadrique qui admet le point pour centre. »

L'étude de ce système nul quadratique se rattache à l'étude du complexe des axes des sections planes de la quadrique étudié par Reye.

Bagnera (*G*). — Sur les groupes abstraits de degré 32 (263-275).

Dans un travail publié dans le Volume précédent des *Annali*, l'auteur a étudié la composition des groupes finis dont le degré est la cinquième puissance d'un nombre premier p. Il revient ici sur le cas particulier ($p = 2$) des groupes de degré 32. Il donne explicitement le tableau de tous ces groupes, tableau qui rectifie celui du travail cité plus haut dans lequel s'étaient glissées quelques inexactitudes. Les groupes de degré 32 sont au nombre de 51.

Bottari (*A.*). — Sur la rationalité des plans multiples $\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\}$ (277-296).

Le but de ce Mémoire est en définitive la recherche des conditions nécessaires et suffisantes de rationalité de la surface

$$z^n = F(x, y).$$

Le cas de $n = 2$ a été résolu par Clebsch et Nöther. Pour n quelconque, si la surface est rationnelle, on peut ramener F par des transformations birationnelles à la forme typique

$$F = (x - a) f_{\mu n}(x, y),$$

où $f_{\mu n}$ est une forme de degré μn ($\mu \geqq 0$) en x, y.

Outre cette forme typique générale, on a les formes particulières suivantes :

1° Pour $n = 3$,

$$F(x, y) = f_3(x, y),$$

où f_3 est une forme cubique, et

$$F(x, y) = x^2 y^2 + xy\varphi_3 + \varphi_6,$$

où φ_3 et φ_6 sont des formes de degrés respectifs 3 et 6;

2° Pour $n = 5$,

$$F(x, y) = y^3 + \varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) + c,$$

où φ_2 et φ_1 sont des formes de degrés respectifs 2 et 1, et c une constante arbitraire.

Dini (*U.*). — Études sur les équations différentielles linéaires (297-324).

Soit l'équation différentielle

$$(1) \qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = X,$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont des fonctions connues de x et X une fonction dépendant de x, et au besoin de y et de certaines des dérivées de y : l'équation peut donc ne pas être linéaire. L'auteur déduit de l'équation (1) la relation suivante :

$$(2) \quad p_0 y^{(n-1)} + p_1 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-2} y' + p_{n-1} y = \int_\alpha^x (yZ - zX)\, dx + c;$$

dans cette équation, $p_0, p_1, \ldots$ sont les fonctions calculées successivement ainsi qu'il suit :

$$\begin{aligned} p_0 &= z a_0, \\ p_1 &= z a_1 - p'_0, \\ p_2 &= z a_2 - p'_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{n-1} &= z a_{n-1} - p'_{n-2}, \end{aligned}$$

z étant une fonction arbitraire; Z est le polynome adjoint du premier membre de (1), polynome qui est aussi égal à $-p_n$; c est une constante égale à la valeur du premier membre de (2) pour $x = \alpha$; c dépend donc de la fonction z choisie et de l'intégrale y considérée.

Si l'on prend pour y une intégrale déterminée de (1) et pour z successivement n fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, on a n équations analogues à l'équation (2). Supposons que le déterminant

$$Q = \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & \ldots & z_1^{n-1} \\ z_2 & z'_2 & \ldots & z_2^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ z_n & z'_n & \ldots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro. L'auteur déduit alors des n équations ainsi établies l'équation suivante, qui joue le rôle fondamental dans ses recherches :

$$(3) \qquad y = \frac{(-1)^{n-1}}{a_0 Q} \left[Q_c + \int_\alpha^x X_{x_1} q_{x, x_1}\, dx_1 - \int_\alpha^x y_{x_1} q_{x, x_1}\, dx_1 \right];$$

Q_c, q_{x, x_1} et q_{x, x_1} désignent les déterminants déduits de Q en y remplaçant les éléments de la dernière colonne respectivement par les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ (analogues à c), par $z_1, z_2, \ldots, z_n$, enfin par $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ et en remplaçant ensuite x par x_1 dans les éléments de la dernière colonne ainsi transformée.

Cette formule (3) donne, pour une intégrale quelconque y de l'équation (1), une expression contenant les fonctions arbitraires $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ assujetties seulement à être régulières et à ne pas annuler Q dans l'intervalle α, x.

La principale conséquence qu'en déduit l'auteur est relative au cas où X ne dépend que de x. En remplaçant dans (3) x_1 par x_2, puis x par x_1, on a une nouvelle formule donnant y_{x_1} et, en poursuivant le même procédé, on arrive à exprimer y par une série d'intégrales multiples. L'auteur discute la convergence de cette série vers l'intégrale y considérée et il établit cette convergence

sous diverses hypothèses qu'il précise. Cette série est remarquable par le fait qu'elle dépend de n fonctions arbitraires $z_1, z_2, \ldots, z_n$ En particularisant ces fonctions, on a diverses formes de développement de l'intégrale y en série. L'auteur réserve pour un Mémoire ultérieur les cas particuliers et les applications les plus importantes des résultats précédents.

S. Lattès.

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL'ISTITUTO DI BOLOGNA (1).

Classe di Scienze Fisiche e Matematiche, serie 6ª.

Righi (*A.*). — [T 7*c*] Sur la trajectoire parcourue par un électron autour d'un ion dans le champ magnétique (3-31).

Canevazzi (*S.*). — [T 2*a*] Sur les formules pour le calcul de l'épaisseur dans les cylindres creux, intérieurement comprimés (65-77, une planche).

Razzaboni (*A.*). — [O 2] Sur certaines transformations particulières des courbes dans l'espace (109-117).

Généralisation d'une question traitée par M. Salkowski [*Zur Trans. v. Raumkurven* (*Math. Ann.*, 1909)]. L'auteur suppose que les tangentes, ou les normales principales ou les binormales aux points correspondants des deux courbes fassent entre elles un angle constant.

Lorsqu'on suppose que cette propriété a lieu pour toutes les trois directions principales, on trouve qu'à l'exception du cas où les normales principales correspondantes sont parallèles, il n'y a que les hélices cylindriques qui satisfassent à la condition mentionnée.

Guarducci (*F.*). — [U 10*b*] Sur l'erreur que l'on peut commettre dans l'évaluation de la surface géographique des États (131-137).

Guarducci (*F.*). — [X 8] Sur un disposé cinématique capable de donner la représentation mécanique des fonctions exponentielle et logarithmique (139-141, une planche).

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVI$_2$, p. 96-102.

Arzelà (*C.*). — [J 3*a* ref. H 11] Sur quelques questions de calcul fonctionnel (297-315).

L'auteur envisage la variété de toutes les fonctions $y = y(x)$ passant par deux points fixes P_1, P_2, satisfaisant à la condition

$$l \leqq \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \leqq L$$

et renfermées dans une région déterminée du plan. A cette variété, il étend le lemme fondamental du calcul des variations qui est le suivant :

« Si M est une fonction de x, continue dans l'intervalle $(x_1 \ldots x_2)$ et si l'on a

$$\int_{x_1}^{x_2} \eta \, M \, dx = 0$$

pour toute fonction η qui s'annule en x_1 et x_2 et qui en $(x_1 \ldots x_2)$ a une dérivée continue, on doit avoir en $(x_1 \ldots x_2)$

$$M = 0. »$$

L'extension est la suivante :

« Étant données $y_0(x)$ une fonction *intérieure* à la variété considérée et $y(x)$ une quelconque des fonctions de la même variété, si l'on a toujours

$$\int_{x_1}^{x_2} [y(x) - y_0(x)] \, M[x, y_0(x)] \, dx = 0,$$

on doit avoir

$$M[x, y_0(x)] = 0$$

dans tout l'intervalle $(x_1 \ldots x_2)$. »

Ensuite, l'auteur recherche le minimum ou le maximum de l'intégrale

$$I(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) \, dx,$$

fonction des lignes $y = y(x)$.

Tome VIII, 1910-1911.

Razzaboni (*A.*). — [O 2 ref. Q 1 *b*] Sur les courbes à double courbure en Géométrie hyperbolique.

Dans un espace hyperbolique, les formules correspondant à celles de Frenet sont :

$$\frac{dx_i}{ds} = \xi_i,$$

$$\frac{d\xi_i}{ds} = \frac{\eta_i}{\rho} + x_i,$$

$$\frac{d\eta_i}{ds} = -\frac{\xi_i}{\rho} - \frac{\zeta_i}{T},$$

$$\frac{d\zeta_i}{ds} = \frac{\eta_i}{T}.$$

Ces formules avaient été établies par l'auteur (*Le formule del Frenet in Geometria iperbolica, con applicazioni*. Bologna, tip. Gamberini e Parmeggiani, 1899). Ici, il fait de ces formules d'autres applications. Il étudie les développables liées à la courbe, aux développées et aux développantes, et aux courbes de Bertrand (qui ont en commun les normales principales). Pour ces dernières, il démontre qu'elles satisfont à des conditions analogues à celles qui ont lieu dans l'espace ordinaire; par exemple, à une condition de la forme

$$\frac{A}{T} + \frac{B}{\rho} + C = 0.$$

Pincherle (*S.*). — [H 11] Notes de calcul fonctionnel. Mémoire I (117-152).

Un ensemble (espace) S de fonctions est *linéaire* lorsqu'étant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ des fonctions de x, appartenant à S, la fonction

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots$$

(où $a, b, c, \ldots$ sont des constantes) y appartient aussi. Après avoir défini les *opérations fonctionnelles linéaires* A comme celles qui, appliquées aux fonctions de S, sont univoques, distributives et continues, il considère la série d'opérations

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} k^{n-1} A^n,$$

pour laquelle on a

$$R(\alpha) - kAR(\alpha) = A(\alpha)$$

et qu'il appelle *résolvante de Fredholm* de l'opération A. La raison de cette détermination est que si l'on a l'équation fondamentale

$$\varphi - kA(\varphi) = \alpha,$$

la solution est

$$\varphi = \alpha + kR(\alpha).$$

En faisant des hypothèses particulières sur la nature de R en dépendance du paramètre k, on arrive à des résultats remarquables concernant la classification des opérations linéaires. Particulièrement important est le cas où les singularités de R comme fonction analytique de k sont indépendantes du choix de l'élément α et des valeurs de x.

Il étudie le cas où R est une transcendante entière, convergente uniformément par rapport à x dans l'intervalle où cette variable est considérée, et aussi convergente uniformément (comme opération) autour de tout élément α. Ces opérations sont appelées du type de *Volterra*, ou de type V. Le calcul relatif à des opérations de ce type, permutables entre elles, a été développé par M. Volterra (*Rend. dei Lincei*, 1910) pour le cas des opérations intégrales entre des limites variables. Ici, l'auteur reprend les propositions de M. Volterra dans le cas général abstrait. Ces opérations n'admettent pas d'éléments inva-

riants pour aucune des valeurs finies de k. L'opération

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n,$$

A étant du type V, et $c_0 = 0$ est aussi du type V.

Si deux opérations permutables A, B sont du type V, leur produit AB l'est aussi. Autres propriétés analogues pour le cas où, au lieu de deux opérations, on en considère plusieurs $A_1, A_2, \ldots, A_p$.

Un deuxième type d'opérations linéaires est celui où la résolvante R est fonction méromorphe de k, à pôles fixes, et telle que le développement en série de puissances de $k - k_0$ autour d'une valeur k_0, qui n'est pas un pôle, est uniformément convergente (comme opération) autour de tout élément α. C'est le *type de Fredholm* ou *type* F.

Un troisième type est celui où la résolvante R, comme fonction du paramètre, est de la forme

$$R(\alpha) = \int_a^b \frac{\varphi(x : u)}{u - k}\, du,$$

$\varphi(x; u)$ étant un élément de S (comme fonction de x). C'est le *type de Hilbert* ou *type* H.

Ces autres types aussi sont étudiés par l'auteur, dans le but de voir quelles conséquences aura la forme de la résolvante sur l'opération elle-même, et sur la répartition de l'espace fonctionnel.

Guarducci (*F.*). — [X 6] Sur un intégraphe polaire (297-300).

Guarducci (*F.*). — [U] Détermination astronomique de latitude et d'azimut à Fano (301-305).

Cavani (*F.*). — [U 10] Sur la verticalité du *Stadia* dans la mesure des distances en planimétrie (307-334).

Tome IX, 1911-1912.

Guarducci (*F.*). — [X 6] Sur un arithmomètre multiplicateur-diviseur (33-35).

Razzaboni (*A.*). — [O 6 ref. P 5 *b*] Sur la représentation équivalente d'une surface sur une autre par parallélisme de normales (45-59).

Dans la représentation à normales parallèles, il y a sur chacune des deux surfaces un double système de lignes (réelles, coïncidentes ou imaginaires qui

conservent la même direction (Mémoire de l'auteur dans le *Giornale di Matematica*, t. XXVII), et cela simplifie notablement le problème de cette représentation lorsqu'on prend ces lignes pour lignes coordonnées. Les formules trouvées dans le Mémoire cité sont appliquées ici au cas où la transformation doit être équivalente, ou, ce qui revient au même, comme l'auteur le prouve d'abord, lorsque les deux surfaces à normales parallèles doivent avoir aussi même courbure aux points correspondants.

Pincherle (*S.*). — [H 11] Quelques observations sur les systèmes de fonctions associées et sur un groupe d'opérations linéaires (61-70).

Suivant la définition de Fischer (*C. R. Acad. Sc.*, t. CXLIV, p. 1022), une succession de fonctions $f_n(x)$, intégrales entre 0 et 1, est *convergente en moyenne* à la fonction $f(x)$ lorsqu'on peut avoir pour n suffisamment grand

$$\int_0^1 [f(x) - f_n(x)]^2 dx < \varepsilon.$$

Alors, étant

$$\alpha_1(x), \quad \ldots, \quad \alpha_n(x), \quad \ldots$$

une succession de fonctions, et

$$\beta_1(x), \quad \ldots, \quad \beta_n(x), \quad \ldots$$

un système *associé* au précédent, c'est-à-dire tel qu'il fait

$$\int_0^1 \alpha_m(x)\,\beta_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ pour } m \neq n, \\ 1 \text{ pour } m = n, \end{cases}$$

l'auteur démontre que les propriétés des opérations intégrales A ayant un *noyau* exprimé par une série uniformément convergente pour $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(x)\,\beta_n(y)}{k_n},$$

peuvent s'étendre aux opérations B ayant pour noyau la *limite en moyenne* d'une succession

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{\alpha_n(x)\,\beta_n(y)}{k_n} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Les A et les B constituent un sous-groupe d'un groupe infini d'opérations permutables, ayant des propriétés analogues, mais qui ne sont pas exprimables en général par des opérations intégrales. Elles peuvent toutefois se représenter par le produit d'une opération intégrale par l'inverse d'une autre opération intégrale.

Guarducci (*F.*). — [U] Détermination de latitude astronomique faite à Monteluro (Pesaro) (235-236).

Burgatti (*P.*). — [R 8*c*β] Observations sur la théorie des gyroscopes (279-296).

Il y a trois espèces de gyroscopes. Étant donnés $A > B > C$ les moments principaux d'inertie par rapport au point fixe et ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité par rapport aux axes principaux d'inertie, l'auteur appelle *gyroscope de Lagrange* ou *symétrique* le gyroscope dans lequel on a

$$A = B, \qquad \xi = y = 0;$$

gyroscope de Hess, celui pour lequel

$$A(B - C)\xi^2 = C(A - B)\zeta^2, \qquad \eta = 0;$$

gyroscope de la Kowalewska, celui pour lequel

$$A = B = 2C, \qquad \zeta = 0.$$

Tout corps, suspendu par un point convenable, peut devenir un gyroscope de Hess; pour qu'un corps donné puisse devenir un gyroscope symétrique par l'addition de deux masses M_1 et M_2 sur l'axe x, aux distances x_1, x_2 du centre G de gravité, il faut qu'on prenne

$$M_1 = \frac{A - B}{x_1(x_1 + x_2)}, \qquad M_2 = \frac{A - B}{x_2(x_1 + x_2)}.$$

L'auteur trouve aussi les conditions à satisfaire pour que le corps donné puisse devenir un gyroscope de la Kowalewska.

Ce dernier gyroscope est le seul qui ait un système invariant du deuxième ordre et de poids *deux* :

$$\begin{aligned} q^2 - p^2 - l\alpha &= 0 \\ 2pq + l\beta &= 0 \end{aligned} \qquad \left(l = \frac{Mg\xi}{c}\right).$$

Suit l'étude des mouvements satisfaisant à ces équations. Enfin, l'auteur démontre que, dans le gyroscope de Hess, l'axe du couple d'impulsion tend asymptotiquement à tourner uniformément dans le plan passant par l'axe Oy relatif au moment B et normal à l'axe barycentrique.

Donati (*L.*). — [T 7*c*] Sur les forces pondéromotrices électromagnétiques (313-319).

Dans un Mémoire publié dans le Tome VI, l'auteur a déduit les forces pondéromotrices agissant sur les éléments de volume en considérant séparément l'énergie dans le champ électrique et dans le champ magnétique. Ici, il indique un moyen plus simple pour obtenir les mêmes résultats en déterminant l'expression du travail des forces pondéromotrices pour l'unité de volume pour un déplacement s, en le calculant au moyen de la différence entre le travail électromoteur (moins l'effet Joule) et la variation d'énergie électrique, et de la différence entre le travail électromagnétique et la variation d'énergie magnétique.

Étant E la force électrique, H la force magnétique, D, B deux vecteurs tels

qu'il soit

$$\frac{1}{2} D \times E = \text{énergie électrique},$$

$$\frac{1}{2} B \times H = \text{énergie magnétique},$$

et liés respectivement à E, H par des relations linéaires

$$D = (\varepsilon) E, \qquad B = (\theta) H,$$

qui, dans le cas de l'isotropie, se réduisent à des proportionnalités

$$D = \varepsilon E, \qquad B = \theta H,$$

l'auteur trouve l'expression de la force unitaire f agissant sur les éléments de volume du champ électrique sous la forme

$$f = E \operatorname{div} D + \operatorname{rot} E \wedge D - \frac{1}{2} \operatorname{grad}_\varepsilon (E \times D),$$

et celle du champ magnétique sous la forme

$$f = H \operatorname{div} B + \operatorname{rot} H \wedge B - \frac{1}{2} \operatorname{grad}_\theta (H \times B).$$

S. Rindi.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, par MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 158, 1914 (1).

Platrier (*Ch.*). — Sur une propriété caractéristique des surfaces à courbure totale négative constante. (24-26).

A 8830

Goursat (*E.*). — Sur certaines extensions de la formule de Stokes. (26-27).

A 3260 3270

Borel (*E.*). — Sur quelques problèmes de probabilités géométriques et les hypothèses de discontinuité. (27-29).

A 1630

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII$_2$, p. 54.

Gambier. — Sur les courbes à torsion constante. (97-99).

A 8440

Denjoy (*A.*). — Sur une propriété des fonctions à nombres dérivés finis. (99-101).

A 0430 3210

Pal (*J.*). — Sur des transformations de fonctions qui font converger leurs séries de Fourier. (101-103).

A 5610

Frank (*Ph.*) et *Pick* (*G.*). — Sur quelques mesures dans l'espace fonctionnel. (104-105).

A 3210 8490

Bohr (*H.*) et *Lanclan* (*E.*). — Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (106-110).

A 2890 3220

Bricard (*R.*). — Sur un mouvement doublement décomposable. (110-112).

A 8420

Valcovici (*V.*). — Sur les mouvements fluides à tourbillon constant. (169-172).

B 2450

Humbert (*G.*). — Sur quelques fonctions numériques remarquables. (220-226).

A 2890 4040

Gambier. — Sur les courbes de Bertrand et les courbes à courbure constante. (236-238).

A 8440

Keraval (*E.*). — Sur une famille de systèmes triplement orthogonaux. (238-241).

A 8860

Andoyer (*H.*). — Nouvelles tables trigonométriques fondamentales. (241-243).

A 0030

Anghelutza (*Th.*). — Sur le noyau symétrique gauche dans la théorie des équations intégrales. (243-245).

A 4470

Lindelöff (*E.*). — Sur la représentation conforme. (245-248).

A 5660 8840

Remoundos (*G.*). — Sur la convergence des séries de fonctions analytiques. (248-250).

A 3630

Châtelet (*A.*). — Sur les congruences d'ordre supérieur. (250-253).

A 2850

Armellini (*G.*). — Sur la solution analytique du problème restreint des trois corps. (253-255).

B 1610

Duhem. — Rapport sur un Mémoire de M. Louis Roy, intitulé : « Sur le mouvement des milieux visqueux et les quasi-ondes ». (315-320).

B 2490

Gambier. — Sur les courbes algébriques à torsion constante, de genre non nul. (320-323).

A 8440

Buhl (*A.*). — Sur les extensions de la formule de Stokes, les équations de Monge-Ampère et les fonctions analytiques de deux variables. (324-326).

A 3260 3270 4840

Cartan (*E.*). — Sur l'intégration de certains systèmes d'équations différentielles. (326-328).

A 4810

Boulyguine (*B.*). — Sur la représentation d'un nombre entier par une somme de carrés. (328-330).

A 2840

Pölya (*G.*). — Sur une question concernant les fonctions entières. (330-333).

A 3610

Appell (*P.*) et *Kampé de Feriet* (*J.*). — Sur la convergence des séries procédant suivant les polynomes d'Hermite ou les polynomes analogues plus généraux. (381-385).

A 3630

Bernstein (*S.*). — Sur la meilleure approximation des fonctions analytiques possédant des singularités complexes. (467-469).

A 3810

Harris Hancok. — La fonction eulérienne généralisée. (469-470).

A 2810

Andrade (*J.*). — Étude de nouvelles méthodes de compensation et quelques ajustages thermiques. (471-473).

B 0150

Guyon (*E.*). — Sur l'homogénéité des équations et sur la simplification des problèmes quand certaines quantités deviennent petites. (529-534).

B 2080

Darmois (*G.*). — Sur la méthode de Laplace. (546-549).

A 4840

Pick (*G.*). — Sur l'évaluation des distances dans l'espace fonctionnel. (549-551).

A 3260

Franck (*Ph.*). — Sur l'évaluation approximative de la plus petite

valeur caractéristique de quelques équations intégrales. (551-554).

A 4470

Kowalewski (*G.*). — La Géométrie intrinsèque et la première proposition fondamentale de Sophus Lie. (554-556).

A 1230

Rosenblatt (*A.*). — Sur certaines intégrales d'un système de deux équations différentielles ordinaires de premier ordre satisfaisant à des conditions initiales singulières. (556-558).

A 4810

Gambier. — Sur les courbes algébriques à torsion constante, réelles et non unicursales. (613-615).

A 8440

Jager (*F.*). — Sur l'application de la méthode de Fredholm aux marées d'un bassin limité par des parois verticales. (616-618).

A 4470 4840

Mazurkiewicz (*E.*) et *Sierpinski* (*W.*). — Sur un ensemble superposable avec chacune de ses deux parties. (618-619).

A 0430

Pchéborski (*A.*). — Sur une généralisation d'un problème de Tchébischeff et de Zolotareff. (619-621).

A 1610

Gau (*P.-E.*). — Sur les transformations générales des systèmes différentiels. (676-679).

A 4840

Armellini (*G.*). — Un théorème général sur le problème de *n* corps. (680-683).

B 1610

Valcovici (*V.*). — Sur la résistance hydrodynamique dans le mouvement non uniforme. (683-685).

B 2400

Rabut (*Ch.*). — Sur le calcul des efforts développés par le retrait du ciment dans les construction en béton armé. (685-687).

B 3600

Guichard (*C.*). — Sur les réseaux et les congruences asymptotiques. (772-775).

A 8455 8870

Blaschke (*W.*). — Évaluation d'intégrales doubles des fonctions convexes. (778-780).

A 3270

Jentzsch (*R.*). — Sur l'extension d'un théorème de Laguerre. (780-782).

A 3610

Godeaux (*L.*). — Sur les involutions n'ayant qu'un nombre fini de points unis, appartenant à une surface algébrique. (851-853).

A 8040

Gunther. — Sur la théorie des systèmes d'équations aux dérivées partielles. (853-856).

A 4840

Batiele (*E.*). — Sur les équations aux dérivées partielles de l'équilibre limite d'un massif sablonneux, compris entre deux surfaces à profil rectiligne : l'une, face postérieure d'un mur de soutènement; l'autre, surface supérieure libre du massif. (856-858).

B 3660

Denjoy (*A.*). — Exemples de fonctions dérivées. (1003-1006).

A 0430 3210

Buhl (*A.*). — Sur la forme intégrale des équations de Monge-Ampère. (1006-1007).

A 4840

Hurwitz (*A.*). — Sur les points critiques des fonctions inverses des fonctions entières. (1007-1008).

A 3620

Lévy (*P.*). — Sur les fonctions de Green et de Neumann. (1008-1010).

A 5660

Hadamard. — Observations au sujet d'une Note de M. Lévy. (1010-1012).

A 5660

Hardy (*G.-H.*). — Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (1012-1014).

A 3610

Moulin (*M.*). — Sur les courbes terminales des spiraux ; influence des termes du second ordre. (1014-1017).

B 0150

Bilimovitch (*A.*). — Sur les transformations canoniques des équations du mouvement d'un système non holonome. (1064-1068).

B 2020

Considère. — Retrait du béton armé, son influence sur les efforts développés dans les constructions en béton armé. (1096-1100).

B 3280

Gunther. — Sur la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles. (1108-1111).

A 4840

Moulin (*M.*). — Influence de la raquette sur le développement concentrique des spiraux des chronomètres. (1111-1114).

B 0150

Clairin (*J.*). — Sur certains systèmes d'équations aux dérivées

partielles du second ordre à deux variables indépendantes. (1147-1148).

A 4840

Blaschke (*W.*). — Nouvelles évaluation de distances dans l'espace fonctionnel. (1149-1151).

A 4470

Riesz (*M.*). — Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique. (1152-1154).

A 1640

Gambier (*B.*). — Sur les surfaces susceptibles d'être engendrées de plusieurs façons différentes par le déplacement d'une courbe invariable. (1155-1157).

A 8420

Roy (*L.*). — Sur le mouvement à trois dimensions des milieux visqueux indéfinis. (1158-1160).

B 2490

Jager (*F.*). — Sur l'application de la méthode de Ritz à certains problèmes de la Physique mathématique et en particulier aux marées. (1160-1161).

A 5650

Picard (*E.*). — Quelques réflexions sur certains résultats de Henri Poincaré concernant la Mécanique analytique. (1241-1245).

B 2000

Guichard (*C.*). — Sur certaines congruences spéciales de cercles et de sphères. (1247-1249).

A 8810 8870

Nörlund (*N.-E.*). — Sur les séries de facultés. (1252-1254).

A 3630

Esclangon (*E.*). — Sur les intégrales quasi périodiques d'équations différentielles linéaires. (1254-1256).

A 4850

Fekete (*M.*). — Sur une limite inférieure des changements de signe d'une fonction dans un intervalle. (1256-1258).

A 3210

Lusin (*N.*). — Sur un problème de M. Baire. (1258-1261).

A 0430 3210

Godeaux (*L.*). — Sur les surfaces algébriques doubles ayant un nombre fini de points de diramation. (1261-1263).

A 8040

Roy (*L.*). — Sur les quasi-ondes à trois dimensions. (1263-1265).

B 2490

Lallemand (*Ch.*). — Sur la question du litre. (1297-1301).

B 0120

Parenty (*H.*). — Sur un régulateur du débit de l'eau des rigoles et des réservoirs à niveau libre. (1317-1321).

B 2810

Buhl (*A.*), — Sur la torsion géodésique des contours fermés. (1323-1325).

A 8450

Nörlund (*N.-E.*). — Sur les séries de facultés et les méthodes de sommation de Cesarò et de M. Borel. (1325-1327).

A 3630

Fejér (*L.*). — Nombre des changements de signe d'une fonction dans un intervalle et ses moments. (1328-1331).

A 3210

Goloubeff (*W.*). — Sur les fonctions à singularités discontinues. (1407-1408).

A 0430 3600

Moulin (*M.*). — Sur la position du centre de gravité des spiraux munis de courbes terminales théoriques. (1409-1411).

B 0150

Ballif (*L.*). — Sur les surfaces engendrées de deux manières différentes par le mouvement d'une courbe indéformable. (1484-1486).

A 8420

De Tannenberg (*W.*). — Sur une équation fonctionnelle et les courbes à torsion constante. (1486-1488).

A 8440

Gronwall (*T.-H.*). — Sur la série de Laplace. (1488-1490).

A 5620

Considère. — Déformations et fatigues du béton armé. Application aux voûtes. (1550-1554).

B 3630

Patrick (*J.-B.*). — Sur une formule directe pour la solution d'une équation intégrale d'Abel. (1562-1565).

A 4470

Armellini (*G.*). — Le problème des deux corps de masses variables. (1565-1568).

B 1610

Humbert (*G.*) *et Lévy* (*P.*). — Sur les fonctions abéliennes singulières de trois variables. (1609-1616).

A 4070

Gevrey (*M.*). — Sur les propriétés analytiques des solutions des équations aux dérivées partielles. (1652-1655).

A 4800

Supantschitsch (*R.*). — Sur un développement en série des puissances d'un polynome. (1655-1657).

A 3630

Riesz (*F.*). — Sur les polynomes trigonométriques. (1657-1661).

A 4030

Bernstein (*S.*). — Sur la convergence absolue des séries trigonométriques (1661-1664).

A 5610

Gronwall (*T.-H.*). — Sur quelques méthodes de sommation et leur application à la série de Fourier. (1664-1666).

A 5610

Bouliguine (*B.*). — Sur une propriété de la fonction $\zeta(t)$ de Riemann. (1666-1667).

A 3610

Boussinesq (*J.*). — Sur le calcul de plus en plus approché des vitesses bien continues de régime uniforme dans un tube prismatique à section carrée. (1743-1749).

B 2400

Considère. — Mesure du retrait, des efforts, de l'élasticité et de la résistance du béton dans les constructions en béton armé. (1756-1760).

B 3280

Angelesco. — Sur une généralisation des polynomes d'Hermite. (1770-1773).

A 3630

Appell (*P.*). — Observations sur une Note de M. Angelesco. (1773-1774).

A 3630

Moore (*C.-N.*). — Sur la relation entre certaines méthodes pour la sommation d'une série divergente. (1774-1776).

A 3220

Tonelli (*L.*). — Sur une méthode directe du calcul des variations. (1776-1778).]

A 3280

Renard (*P.*). — Sur le mode de construction des dirigeables souples. (1778-1780).

B 2860

Humbert (*G.*). — Sur quelques fonctions numériques remarquables. (1840-1841).

A 4070

Boussinesq (*J.*). — Sur la vitesse moyenne ou de débit et la vitesse maximum ou axiale, dans un tube prismatique, à section régulière d'un nombre quelconque m de côtés. (1846-1851).

B 2400

Muntz (*Ch.-H.*). — Sur une propriété des polynomes de Bernoulli. (1864-1866).

A 3210

Popovici (*C.*). — Sur une équation fonctionnelle. (1866-1869).

A 4460

Littlewood (*J.-E.*). — Sur la distribution des nombres premiers. (1869-1872).

A 2900

Schlesinger (*L.*). — Sur les équations intégro-différentielles. (1872-1875).

Bartel (*K.*). — Sur une méthode géométrique de formation de quelques surfaces réglées d'ordre supérieur. (1875-1877).

A 7640

Kœnigs (*G.*). — Sur une nouvelle formule exprimant la puissance indiquée d'un moteur à quatre temps en fonction d'éléments expérimentaux. (1877-1879).

B 1620

Guichard (*C.*). — Sur les surfaces telles que les sphères oscula-

trices aux lignes de courbure d'une série forment un système O ou un système 2 I. (1961-1969).

A 8830 8870

Buhl (*A.*). — Sur la courbure normale des contours fermés. (1978).

A 8440

Backlund (*R.*). — Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (1979-1982).

A 3610

Poeschi (*T.*). — Sur une évaluation des potentiels. (1982-1983).

A 5600

Tonelli (*L.*). — Sur une méthode directe du calcul des variations. (1983-1986).

A 3280

Bohr (*H.*). — Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann. (1986-1989).

A 3610

C. Guichard.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA [1].

Serie III, t. III, 1899.

Baire (*R.*). — Sur les fonctions de variables réelles. (1-123).

Ce célèbre Mémoire de M. Baire a été présenté comme Thèse à la Faculté des Sciences de Paris et, à ce titre, il a déjà été analysé dans le *Bulletin* par Jules Tannery (*Bulletin*, I, t. XXVII, 1903, p. 293). Nous renverrons donc le lecteur à cette analyse en rappelant seulement ici que l'auteur résout complètement les deux problèmes suivants :

1° Une fonction de deux variables étant assujettie à être continue par rapport à chacune d'elles, les valeurs qu'elle prend sur une ligne quelconque forment une fonction d'une variable qui peut être discontinue. Quelle est la nature de cette fonction ?

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIX$_2$, p. 23-36.

2° Quelles sont les fonctions discontinues qu'il est possible de représenter par des séries de fonctions continues ?

Ces deux problèmes ont la même solution : pour qu'une fonction puisse être obtenue dans les conditions du premier problème, ou dans celles du second, il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue relativement à tout ensemble parfait.

C'est aussi dans ce Mémoire que l'auteur pose les bases de sa classification des fonctions en classes, les deux premières classes étant la classe 0 formée par les fonctions continues et la classe 1 formée par les fonctions discontinues limites de fonctions continues.

Dini (*U.*). — Études sur les équations différentielles linéaires. (125-183).

L'auteur a publié un premier Mémoire sous le même titre dans le Volume précédent des *Annali*. Les notations adoptées dans le travail actuel sont celles de ce précédent Mémoire à l'analyse duquel nous renvoyons le lecteur. L'auteur particularise ici de diverses façons les fonctions arbitraires $z_1, z_2, \ldots, z_n$ qu'il avait considérées et il obtient ainsi divers développements en séries remarquables, utiles en particulier pour l'étude asymptotique des intégrales lorsque la variable x devient infinie.

Tout d'abord, l'auteur choisit pour fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_n$ des exponentielles distinctes $e^{\omega_1 x}, e^{\omega_2 x}, \ldots, e^{\omega_n x}$ et après avoir pris pour exposants ω des constantes quelconques différentes, il obtient d'importants résultats en choisissant ces constantes ainsi qu'il suit. Soit

$$(1) \qquad a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

l'équation différentielle considérée. Supposons que, x croissant indéfiniment par valeurs positives, par exemple, les coefficients aient des limites finies α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, la première α_0 de ces limites n'étant pas nulle. Soient

$$(2) \qquad \alpha_0 y^{(n)} + \alpha_1 y^{(n-1)} + \ldots + \alpha_{n-1} y' + \alpha_n = 0$$

l'équation différentielle limite, équation à coefficients constants, et $e^{\omega_1 x}$, $e^{\omega_2 x}, \ldots, e^{\omega_n x}$ un système fondamental de solutions, supposées d'abord distinctes, de l'équation différentielle adjointe

$$\alpha_0 z^{(n)} - \alpha_1 z^{(n-1)} + \alpha_2 z^{(n-2)} - \ldots = 0.$$

L'auteur prend pour $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les exponentielles précédentes et l'étude du développement des intégrales de (1) en série d'intégrales multiples, tel qu'il a été établi dans son premier Mémoire, lui fournit alors les résultats suivants qui donnent, dans des cas très étendus, l'allure des intégrales de l'équation (1) pour x très grand.

Soit $\tau(x)$ une fonction positive telle que l'intégrale $\int_x^\infty \frac{\tau(x)\,dx}{x}$ ait un sens. Supposons que l'équation (1) dont l'ordre est n admette pour x infini une équation limite (2) d'ordre n également, que les différences $a_i - \alpha_i$ soient des infiniment petits d'ordre supérieur ou égal à celui de $\frac{\tau(x)}{x}$ et que les

racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de l'équation caractéristique limite de (1) soient distinctes. Dans ces conditions :

a. Si ces racines ont une même partie réelle λ, l'intégrale générale de l'équation (1), pour x très grand, prendra la forme

$$y = y_0 + \varepsilon e^{\lambda x},$$

où y_0 est l'intégrale générale de l'équation limite (2) et où l'on a posé

$$\varepsilon = g \int_x^\infty \frac{\tau(x)}{x}\, dx,$$

g étant une quantité dont le module est inférieur à un nombre fini.

b. Si les racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n'ont pas toutes la même partie réelle et si l'on désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h (h < n)$ celles qui ont la plus petite partie réelle commune, il existe une intégrale particulière de l'équation (1) avec h constantes arbitraires qui, pour x très grand, prendra la forme

$$y = y_0 + \varepsilon e^{\lambda x},$$

où ε a le même sens que ci-dessus et où y_0 est une certaine intégrale particulière $c'_1 e^{\lambda_1 x} + c'_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + c'_h e^{\lambda_h x}$ de l'équation limite.

Si les hypothèses relatives à la croissance des coefficients ne sont pas toutes vérifiées, on peut, dans certains cas, transformer l'équation différentielle en une autre équation à laquelle on puisse appliquer les résultats précédents. L'auteur étudie, en particulier, par ce moyen des catégories très étendues d'équations différentielles du second ordre et il obtient ainsi, par une voie nouvelle, les résultats établis par M. Kneser, relativement à la représentation asymptotique des intégrales des équations différentielles du second ordre, dans ses Mémoires du *Journal de Crelle* (t. 116, 117, 120) analysés dans le *Bulletin* (t. XXVIII, 1904).

M. Dini étudie ensuite le cas où l'équation caractéristique de l'équation limite (2) admet des racines égales et il donne encore dans ce cas des formules asymptotiques valables sous certaines hypothèses.

L'auteur prend ensuite comme fonctions arbitraires $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les fonctions

$$z_1 = 1, \qquad z_2 = x, \qquad \ldots, \qquad z_{n-1} = x^{n-2},$$

la fonction z_n étant déterminée par la condition $a_0 Q = 1$. Ce choix des fonctions arbitraires donne lieu à de nouveaux développements en série étudiés avec quelque détail lorsque l'équation est du second ordre. L'auteur retrouve ainsi les développements connus des fonctions de Bessel et de quelques autres fonctions vérifiant des équations du second ordre. Un exemple intéressant est celui de l'équation du second ordre qui donne les périodes des fonctions elliptiques, considérées comme fonctions du module.

D'une façon générale, l'équation homogène du second ordre mise sous la forme

$$(3) \qquad y'' + a_2(x) y = 0$$

admet les deux solutions remarquables suivantes obtenues sous la forme de séries d'intégrales multiples dont nous nous bornerons à écrire ici les premiers termes :

$$y = 1 + \varepsilon_1 \int_0^x a_{2,x_1}(x - x_1)\, dx_1$$
$$+ \varepsilon_2 \int_0^x a_{2,x_1}(x - x_1)\, dx_1 \int_0^{x_1} a_{2,x_2}(x_1 - x_2)\, dx_2 + \ldots$$
$$y = 1 + \varepsilon_1 \int_0^x a_{2,x_1} x_1 (x - x_1)\, dx_1$$
$$+ \varepsilon_2 \int_0^x a_{2,x_1}(x - x_1)\, dx_1 \int_0^{x_1} a_{2,x_2} x_2 (x_1 - x_2)\, dx_2 - \ldots$$

Ces formules donnent les intégrales fondamentales de l'équation (3) dans tout intervalle, comprenant le point $x = 0$, dans lequel a_2 est une fonction régulière. D'autres développements analogues sont valables dans tout intervalle, comprenant un point quelconque $x = \alpha$, dans lequel la fonction a_2 est régulière.

D'autres développements en série d'intégrales multiples des intégrales de la même équation (3) s'obtiennent en prenant pour fonctions z_1 et z_2 les fonctions $z_1 = \sin px$, $z_2 = \cos px$. L'auteur applique les formules obtenues aux fonctions de Legendre et aux fonctions de Bessel.

Bianchi (*L.*). — Sur la théorie des transformations des surfaces à courbure constante (185-297).

Les nouvelles transformations données par M. Bianchi dans ce travail ont leur origine dans les théorèmes de M. Guichard relatifs à la déformation des quadriques de révolution (*Comptes rendus*, 23 janvier 1899). M. Bianchi rattache ces théorèmes à la théorie de la déformation des congruences rectilignes normales.

Soit une surface S_0 flexible et inextensible; à tout point M_0 de cette surface faisons correspondre un segment de droite M_0M dont l'extrémité M décrive une surface S normale au segment. Imaginons que, dans une déformation quelconque, la surface de départ S_0 entraîne avec elle les segments M_0M, chaque segment M_0M étant supposé invariablement lié au plan tangent à S_0 au point M_0. On réalise ainsi une déformation de la congruence des droites M_0M et, d'après un théorème de Beltrami, la surface S lieu du point M demeure constamment orthogonale à la droite M_0M dans toutes ces déformations. Si, en outre, la surface S est avant la déformation une surface W de Weingarten dont les rayons de courbure principaux sont liés par la relation

$$f(r_1, r_2) = 0, \tag{1}$$

on peut se proposer le problème suivant :

PROBLÈME (A). — *A quelles conditions la surface* S *déformée sera-t-elle aussi une surface* W *dont les rayons de courbure vérifient encore la même relation* (1) *et cela pour toutes les déformations de* S_0 ?

Le théorème de Weingarten donne d'abord une catégorie étendue de solu-

tions de ce problème : il suffit que la surface S_0 soit applicable sur une surface de révolution et que les segments M_0M soient tangents à S_0 le long des déformées des méridiens. Les théorèmes de M. Guichard donnent d'autres solutions du même problème (A).

M. Bianchi se propose de trouver toutes les solutions du problème (A) dans le cas où la surface S est une surface minima ou une surface à courbure constante.

Si la surface S est ou bien minima ou bien à courbure constante *positive*, il n'existe pas d'autres solutions que celles données par les théorèmes de M. Guichard ou par le théorème de Weingarten.

Mais si la surface S est une surface à courbure constante négative, outre les solutions fournies par le théorème de Weingarten, il y a trois cas essentiellement nouveaux. La surface S_0 doit être applicable sur une surface de révolution qui a pour méridienne l'une des trois courbes ayant respectivement pour équation

$$z = \log r, \qquad r = \sqrt{1 - a^2}\,\mathrm{ch}\,z, \qquad r = \sqrt{a^2 - 1}\,\mathrm{sh}\,z.$$

Dans les trois cas, les rayons M_0M de la congruence sont normaux aux parallèles de S_0 et ces rayons réfléchis sur S_0 fournissent également de nouvelles solutions.

De la sorte, à toute surface S solution du problème (A) correspond une nouvelle surface $\overline{S}$ normale aux rayons réfléchis, deux points correspondants M, $\overline{M}$ de S, $\overline{S}$ étant symétriques par rapport au plan tangent au point d'incidence M_0 de la surface S_0.

Dans la correspondance entre les points de S, $\overline{S}$, les lignes de courbure ainsi que les lignes asymptotiques (réelles ou imaginaires) des deux surfaces se correspondent.

Pour voir si les résultats précédents peuvent fournir une méthode de transformation de *toute* surface à courbure constante, il y a lieu de rechercher si une pareille surface S peut toujours être considérée comme solution du problème (A). M. Bianchi démontre qu'il en est bien ainsi et que de plus, cette surface S dérive d'une surface S_0 de ∞^2 manières différentes; on obtient ces ∞^2 surfaces S_0 par l'intégration d'un système de deux équations aux différentielles totales; la surface de révolution sur laquelle sont applicables ces ∞^2 surfaces S_0 dépend en outre d'une constante arbitraire.

A toute surface S à courbure constante, on peut faire correspondre ainsi ∞^1 nouvelles surfaces $\overline{S}$ ayant une même courbure constante.

On a ainsi des transformations *toujours réelles* des surfaces à courbure constante positive ou négative.

A un autre point de vue, ces transformations conduisent l'auteur à une classe de surfaces de Weingarten ayant la même représentation sphérique des lignes de courbure que les surfaces à courbure constante considérées.

Les nouvelles transformations étudiées dans ce Mémoire peuvent se ramener soit aux transformations dites *complémentaires* des surfaces à courbure constante, soit aux transformations de Backlund des mêmes surfaces. Mais ces dernières ne sont pas toujours réelles et c'est seulement à l'aide de deux transformations de Backlund imaginaires conjuguées faites successivement qu'on obtiendrait les transformations *réelles* envisagées par l'auteur.

En appliquant les nouvelles transformations à un système de ∞^1 surfaces à courbure constante faisant partie d'un système triple orthogonal de Weingarten, on peut déduire de tout système de cette nature ∞^3 nouveaux systèmes de la même nature.

Viterbi (*A.*). — Sur l'opération fonctionnelle représentée par une intégrale définie considérée comme élément d'un calcul (299-343).

Les deux premières Parties de ce Mémoire ont été publiées au Tome XXVI, 2e série des *Annali*. Dans cette troisième Partie, l'auteur poursuit l'extension des diverses notions de l'analyse au calcul des opérations I envisagées précédemment. Il étudie d'abord les équations algébriques entre opérations I, puis les équations ayant la forme d'équations différentielles linéaires. Il étend à l'analyse des opérations I la théorie de la décomposition des expressions différentielles linéaires en facteurs différentiels irréductibles, la théorie du multiplicateur et celle de l'équation adjointe. Dans une dernière Partie, il donne les formules de passage des intégrales aux coefficients et réciproquement des coefficients aux intégrales pour une équation différentielle linéaire non homogène.

Serie III, t. IV; 1900.

Bianchi (*L.*). — Sur la déformation des paraboloïdes de révolution dans les espaces à courbure constante (1-66).

Le but de ce Mémoire est d'établir, pour les espaces non euclidiens à courbure constante positive ou négative, des théorèmes analogues à ceux que M. Guichard a établis relativement à la déformation des quadriques de révolution.

Le point de départ des recherches actuelles de M. Bianchi est le même que dans le Mémoire du même auteur publié dans le Volume précédent des *Annali* : il réside dans la théorie de la déformation des congruences rectilignes normales dont les rayons sont invariablement liés à une surface de départ S_0 dans toutes les déformations de cette surface S_0.

L'auteur traite ici le probleme qu'il a appelé *problème* (A) dans son précédent Mémoire, pour les deux catégories de surfaces suivantes :

1° Surfaces S d'aire minima de l'espace elliptique ou hyperbolique;

2° Surfaces S de l'espace pseudosphérique dont la courbure moyenne est constante et égale à $\frac{2}{R}$, en désignant par $-\frac{1}{R^2}$ la courbure constante de l'espace pseudosphérique considéré.

Il établit dans chaque cas les conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir la surface de départ S_0 et la congruence qu'on déforme pour que les conditions du problème (A) soient remplies.

Les résultats présentent une grande analogie avec ceux trouvés par l'auteur pour l'espace euclidien dans son précédent Mémoire. La surface de départ S_0 doit être applicable sur un paraboloïde de révolution de l'espace non euclidien.

En faisant la transformation conforme de l'espace non euclidien Σ sur l'espace euclidien Σ_0, les résultats se trouvent transportés dans ce dernier espace; les surfaces minima de Σ donnent dans Σ_0 des surfaces à lignes de courbure isothermes et la solution du problème (A) permet ainsi de faire dériver de toute surface de cette classe une triple infinité de surfaces de la même classe. Ces mêmes surfaces de Σ donnent dans l'espace Σ_0 des surfaces de Liouville admettant l'un des éléments linéaires

$$ds^2 = (\cos u + \cos v)(\cos u\, du^2 + \cos v\, dv^2),$$
$$ds^2 = (\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v)(\operatorname{sh} u\, du^2 + \operatorname{sh} v\, dv^2).$$

La solution du problème (A) permet de trouver une infinité de surfaces admettant l'un de ces éléments linéaires.

Tanturri (*A.*). — Recherches sur les espaces plurisécants d'une courbe algébrique (67-121).

Mémoire de Géométrie énumérative. On se propose de trouver le nombre d'espaces linéaires à k dimensions qui coupent en i points une courbe donnée de l'espace linéaire à n dimensions. Le problème a un nombre fini de solutions si l'on a :

$$(k+1)(n-k) = i(n-k-1).$$

L'auteur donne une méthode permettant de résoudre le problème lorsque la courbe donnée est rationnelle ou elliptique.

Calò (*B.*). — Résolution de quelques problèmes sur l'applicabilité des surfaces (123-130).

L'auteur résout les deux problèmes suivants :

1° *Trouver tous les couples de deux surfaces applicables* S *et* S' *telles que la distance d'un point de* S *à un plan fixe soit égale à la distance du point correspondant de* S' *à un point fixe.*

2° *Trouver tous les couples de deux surfaces applicables* S *et* S' *telles que la somme ou la différence des distances de deux points correspondants de* S *et de* S' *à un point fixe donné soit constante.*

La solution dépend dans les deux cas d'une fonction arbitraire de variable complexe et elle comprend une infinité de couples de surfaces algébriques.

Armanini (*E.*). — Sur la surface de moindre résistance (131-149).

Étude d'un problème de Calcul des variations dont la solution remonte à Newton. On considère un solide de révolution animé dans un milieu homogène d'un mouvement de translation dans la direction de son axe. On suppose la résistance du milieu sur un élément du corps proportionnelle au carré de la projection de la vitesse sur la normale à cet élément et l'on se propose de déterminer, parmi les solides remplissant des conditions aux limites données, quel est celui pour lequel la résistance totale est un minimum.

Après avoir rappelé la solution classique de ce problème, l'auteur étudie les

solutions discontinues du même problème. Il examine aussi le cas d'un solide de révolution animé d'un mouvement de translation oblique par rapport à la direction de son axe et enfin il étudie le cas d'une résistance proportionnelle à la $n^{\text{ième}}$ puissance de la vitesse.

Dini (*U.*). — Notice nécrologique et liste des travaux d'Eugène Beltrami (150-160).

De Sanctis (*L.*). — Quelques théorèmes nouveaux sur les fonctions harmoniques à trois variables (161-197).

L'auteur rappelle d'abord la définition et les principales propriétés des fonctions harmoniques de trois variables réelles. Après avoir défini les points réguliers et les points singuliers de ces fonctions, il démontre une formule analogue à l'intégrale de Cauchy de la théorie des fonctions d'une variable complexe :

Si la fonction harmonique $F(x, y, z)$ est régulière à l'intérieur d'un domaine limité par une surface S et sur la surface, on a pour tout point x', y', z' intérieur au contour

$$F(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \int\int_S \left(R \frac{\partial F}{\partial n} - F \frac{\partial R}{\partial n} \right) d\sigma,$$

en posant

$$R = \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}.$$

L'auteur étend aux fonctions harmoniques de trois variables réelles les résultats établis par M. Mittag-Leffler pour les fonctions d'une variable complexe. M. Appell avait déjà donné cette extension dans son Mémoire du Tome IV des *Acta mathematica;* l'auteur complète en quelques points les résultats de M. Appell et il établit, par une voie nouvelle, l'existence de la fonction que M. Appell a désignée par $Z(x, y, z)$: cette fonction est une fonction harmonique régulière partout sauf aux sommets d'un réseau de parallélépipèdes, points où elle a des pôles simples avec le résidu $+1$. Suivent quelques propriétés de la fonction $Z(x, y, z)$, dont certaines ont déjà été établies par M. Appell.

Timerding (*H.-E.*). — Sur les lignes osculatrices d'une cubique gauche (199-217) [en français].

L'auteur appelle *lignes osculatrices* d'une cubique gauche les droites tracées dans un plan osculateur à la cubique et passant par le point de contact de ce plan. Ces droites forment une congruence. Soient deux lignes osculatrices, la première passant par le point A de la cubique et rencontrant la tangente en B à la cubique, la deuxième passant par B et rencontrant la tangente en A : elles sont dites lignes *osculatrices jumelles*. L'auteur étudie ces couples de lignes géométriquement et analytiquement. Il définit la cubique par les équations

$$x = \omega^3, \qquad y = \omega^2, \qquad z = \omega,$$

et il se sert d'une représentation des cordes de la cubique gauche par les points d'un plan.

Pincherle (*S.*). — De quelques opérations permettant d'ajouter ou de supprimer des singularités à une fonction analytique (219-280).

Ainsi qu'il l'a déjà fait dans d'autres travaux, l'auteur considère l'ensemble des séries de puissances d'une variable x comme constituant les *points* d'un espace linéaire à une infinité de dimensions, l'*espace fonctionnel* S dont chaque point est une série particulière définie par l'ensemble de ses coefficients. Parmi les opérations qui, appliquées aux points de l'espace S, reproduisent des points de ce même espace, il y a lieu d'envisager les opérations distributives. L'auteur a étudié ces opérations dans son *Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif* (*Math. Annalen*, t. XLIX). Il se propose d'étudier plus particulièrement ici les opérations distributives qui introduisent ou qui suppriment des singularités de nature déterminée dans la fonction analytique définie par une série arbitraire de l'espace fonctionnel S. Ce sujet est développé dans le troisième et dernier Chapitre du Mémoire, les deux premiers Chapitres étant destinés à compléter la théorie générale des opérations distributives.

Dans le premier Chapitre, M. Pincherle définit la transformée XAX^{-1} d'une opération distributive A par une autre opération distributive X et il considère ensuite plus spécialement les opérations transformatrices qui transforment une opération donnée en l'opération de multiplication. Parmi les opérations ainsi obtenues se trouvent la transformation connue sous le nom de *transformation de Laplace*, transformatrice de la dérivation D ainsi que la transformation, employée par M. Borel, qui transforme une fonction donnée en sa fonction *associée*, opération transformatrice de l'inverse D^{-1} de la dérivation.

Le second Chapitre est consacré à l'étude d'opérations distributives que l'auteur appelle *opérations normales*. Une opération normale d'ordre zéro est une opération distributive définie par les équations

$$(1) \qquad U(x^n) = a_n x^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ étant des nombres donnés. Une opération normale A d'ordre m est de même définie par les équations

$$A(x^n) = (a_{n0} + a_{n1}x + \ldots + a_{nm}x^m)x^n$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

L'auteur étudie la composition de ces opérations entre elles et leur composition avec les opérations de multiplication. En particulier, toute opération normale A du premier ordre peut se mettre sous la forme

$$(2) \qquad A = U_1 M_{z-x} U,$$

où U, U_1 sont deux opérations normales d'ordre zéro et M_{z-x} la multiplication par $z - x$.

Dans le Chapitre III, l'auteur définit d'abord les opérations *simples*. Soit

$$\alpha(x) = \sum a_n x^n$$

une série à rayon de convergence non nul. Elle permet de définir par ses coefficients a_n une opération normale d'ordre zéro, définie par les équations (1). Si la fonction $\alpha(x)$ n'a pas d'autre point singulier à distance finie que le point $x = 1$, l'opération U sera dite *simple* : une pareille opération appliquée à une fonction $\varphi(x)$ engendre une fonction qui, en vertu d'un théorème de M. Hadamard, ne peut pas admettre d'autres points singuliers que les points singuliers de $\varphi(x)$. Si l'inverse de U est aussi une opération simple, ce qui est possible, U est une opération qui, appliquée à une fonction analytique quelconque, ne peut ni introduire, ni supprimer des singularités. Parmi ces dernières opérations se trouvent celles pour lesquelles le coefficient a_n est une fonction rationnelle de l'indice n, non nulle ni infinie pour des valeurs entières positives de n.

Soit maintenant A une opération normale du premier ordre telle que les opérations U et U_1 qui figurent dans la formule de composition (2) soient simples ainsi que leurs inverses. A cette opération A on peut faire correspondre une certaine fonction $\omega(x)$ admettant le seul point singulier $x = z$ et présentant en ce point une singularité particulière dépendant de l'opération A. Cette fonction ω possède la propriété suivante : si φ est une fonction analytique semblablement singulière à ω sur le cercle de rayon $|z|$, c'est-à-dire telle que la fonction $\varphi - c\omega$ soit holomorphe sur ce cercle pour une certaine valeur de la constante c, l'opération A appliquée à φ fait disparaître la singularité ainsi définie. Réciproquement, si l'on se donne une fonction ω de la forme

$$\omega(x) = \sum \frac{x^n}{p_n z^n},$$

avec le seul point singulier z, on peut trouver une opération A susceptible de supprimer cette singularité dans toute fonction semblablement singulière à ω sur le cercle de rayon $|z|$. L'opération inverse A^{-1}, appliquée à une fonction φ, introduit la même singularité, sauf si la fonction φ vérifie une certaine condition donnée par l'auteur. Par exemple, si l'opération A est la multiplication par $x - z$, l'opération A^{-1} est la division par $x - z$; la singularité introduite par A^{-1} est un pôle du premier ordre au point $x = z$ et le cas d'exception est celui où la fonction φ s'annule pour $x = z$.

Des considérations analogues s'appliquent aux opérations normales d'ordre supérieur : une pareille opération permet de supprimer un certain ensemble de singularités et l'opération inverse introduit le même ensemble, sauf lorsqu'on l'applique à certaines fonctions exceptionnelles.

Le Mémoire se termine par l'application de la théorie précédente au cas où l'opération A considérée est une opération différentielle linéaire définie par une forme différentielle linéaire du type de Fuchs.

Lauricella (*G.*). — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre (281-333).

Les équations étudiées dans ce Mémoire comprennent comme cas particulier les équations étudiées par M. Picard dans un Mémoire des *Acta mathematica* (t. XII). Ce sont des équations réductibles par un changement de variables à une équation de la forme

$$(1) \qquad \Delta^2 V + f(x, y) V + h(x, y) = 0.$$

où l'on a posé comme d'habitude

$$\Delta^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}.$$

Dans le cas particulier envisagé par M. Picard, $h(x, y)$ est nul.

L'auteur se propose de déterminer une intégrale V de l'équation (1) définie dans un domaine fini σ et prenant des valeurs données sur le contour s de ce domaine. Il introduit à cet effet un paramètre k dans l'équation (1) qu'il remplace par la suivante :

$$(2) \qquad \Delta^2 V - kf(x, y)V + h(x, y) = 0.$$

Supposons d'abord que la fonction $f(x, y)$ soit positive dans tout le domaine σ et envisageons la fonction inconnue V comme fonction du paramètre k. Il existe une fonction V des points de σ et de la variable complexe k qui possède les propriétés suivantes :

1° Cette fonction V est une fonction méromorphe de k. Soit C l'ensemble de ses pôles k_i.

2° A chacun des pôles k_i correspond un résidu p_i qui considéré comme fonction de x et de y est une fonction continue de σ ainsi que ses dérivées et vérifie les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} \Delta^2 p_i + k_i f p_i = 0 & \text{dans } \sigma, \\ p_i = 0 & \text{sur le contour } s. \end{cases}$$

3° Pour toute valeur de k qui ne fait pas partie de l'ensemble C, la fonction V est l'intégrale de l'équation (2) correspondant à une suite donnée de valeurs finies et continues sur le contour s. Cette intégrale est unique pour toutes les valeurs de k qui ne font pas partie d'un certain groupe G de valeurs contenant le groupe C ou coïncidant avec lui. Pour chacune des valeurs k_1 du groupe G, on a au contraire une solution régulière des équations (3).

Revenant à l'équation (1), le problème au contour proposé sera résolu pour cette équation, si $k = 1$ ne fait pas partie du groupe C; la solution sera unique si, en outre, cette même valeur 1 ne fait pas partie du groupe G; si, au contraire $k = 1$ appartient au groupe G, il existe une intégrale régulière de l'équation

$$\Delta^2 V + fV = 0$$

prenant des valeurs nulles sur le contour s.

Ces propositions sont ensuite étendues au cas où $f(x, y)$ n'est pas constamment positive. Il y a encore dans ce cas un groupe de *valeurs exceptionnelles* du paramètre k et il y aura une solution régulière unique de l'équation (1) si $k = 1$ ne fait pas partie de ce groupe : c'est ce qui a toujours lieu si le domaine σ a des dimensions suffisamment petites.

Série III, t. V, 1901.

Reye (*Th.*). — Théorèmes sur les multiplicités linéaires de faisceaux projectifs de sphères à 1, 2 ou 3 paramètres (Kugelbüschel, Kugelbündel, Kugelgebüsche) (1-15) [en allemand].

Les propriétés des systèmes projectifs de sphères étudiées par l'auteur sont déduites de la proposition suivante :

Étant donnés deux faisceaux de sphères à 1, 2 ou 3 paramètres qui se correspondent projectivement, il existe une correspondance projective entre les plans radicaux d'une sphère quelconque et de deux sphères homologues des deux faisceaux.

Parmi les nombreuses configurations géométriques étudiées par l'auteur, signalons une congruence de cercles telle qu'il existe un cercle et un seul de la congruence normal à une sphère ou à un plan quelconque et que, par un point de l'espace, il passe un cercle et un seul de la congruence. Signalons aussi un complexe de cercles tel qu'il existe un cercle et un seul du complexe situé sur une sphère ou sur un plan arbitraire.

Nielsen (*Niels*). — Sur une classe de polynomes qui se présentent dans la théorie des fonctions cylindriques (17-31) [en français].

La fonction cylindrique la plus générale d'argument x et de paramètre μ est une fonction $C^{\mu}(x)$ vérifiant les deux équations fonctionnelles suivantes :

$$\text{(I)} \qquad C^{\mu-1}(x) - C^{(\mu+1)}(x) = 2 D_x C^{\mu}(x),$$

$$\text{(II)} \qquad C^{\mu-1}(x) + C^{(\mu+1)}(x) = \frac{2\mu}{x} C^{\mu}(x).$$

L'auteur démontre que la solution la plus générale de ces équations est

$$C^{\mu}(x) = a(\mu) J^{\mu}(x) + b(\mu) Y^{\mu}(x),$$

où $J^{\mu}(x)$ désigne la fonction cylindrique de première espèce, $Y^{\mu}(x)$ la fonction cylindrique de deuxième espèce, $a(\mu)$, $b(\mu)$ des fonctions périodiques arbitraires de période $+1$.

En particulier, la fonction

$$C^{\mu}(x) = \cos \mu\pi \, J^{-\mu}(x)$$

est une fonction cylindrique de paramètre μ donnant lieu à la relation

$$C^{\mu+n}(x) J^{\mu}(x) - C^{\mu}(x) J^{\mu+n}(x) = \frac{\sin 2\mu\pi}{2\pi} \frac{2}{x} R^{\mu,n}(x),$$

où $R^{\mu,n}(x)$ est un polynome en $\frac{1}{x}$ de degré n.

Les polynomes $R^{\mu,n}(x)$, qui sont identiques aux polynomes $P_n^{\mu}(x)$ de M. Graf (*Annali*, 2e série, t. XXIII), vérifient un grand nombre de relations que l'auteur établit par plusieurs méthodes différentes.

M. Nielsen donne la solution générale de l'équation fonctionnelle (II); enfin il déduit de cette équation le développement des fonctions cylindriques en fractions continues.

Ciani (*E.*). — Contribution à la théorie du groupe de 168 collinéations planes (33-55).

La substitution modulaire

$$x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} \pmod{p},$$
$$(\alpha\delta - \beta\gamma) = 1 \pmod{p}$$

fait correspondre aux $p+1$ nombres

$$\infty, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots \quad (p-1),$$

ces nombres eux-mêmes et fournit ainsi une substitution des $p+1$ éléments

$$x_\infty, \quad x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{p-1}.$$

Dans le cas où $p = 7$, le groupe modulaire ainsi engendré est holoédriquement isomorphe au groupe bien connu G de 168 collinéations planes. L'auteur utilise cet isomorphisme pour l'étude du groupe G et de ses sous-groupes. Dans une deuxième Partie, il considère la *quartique de Klein*, invariante par les substitutions du groupe G : elle possède la propriété d'être un covariant S d'elle-même : l'auteur recherche quelles sont les 35 autres quartiques qui sont aussi des covariants S de cette quartique de Klein.

Hermite (*Ch.*). — Extrait de quelques lettres de M. Ch. Hermite à M. S. Pincherle (57-72).

Ces lettres contiennent diverses applications de la formule d'interpolation de Newton

$$(1) \qquad f(a+x) = f(a) + x\,\Delta f(a) + \frac{x(x-1)}{1.2}\,\Delta^2 f(a) + \ldots$$

dans les cas où elle a lieu. On suppose $\Delta a = 1$. Le caractère essentiel de cette relation est de conserver la même forme lorsqu'on prend soit les dérivées, soit les différences finies des deux membres par rapport à a.

La relation précédente a lieu en particulier pour la fonction

$$f(x) = \log \Gamma(x),$$

a étant un nombre positif. Elle s'applique aussi aux fonctions $\Phi(x)$ définies par une égalité de la forme

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} \varphi(y)\, e^{xy}\, dy;$$

en supposant cette égalité valable pour toutes les valeurs positives de x, la formule (1) est vraie pour $a > 0$. Il en est de même pour les fonctions de la forme

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(y) e^{xy} + \varphi_1(y)]\, dy,$$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{0} [\varphi(y) e^{xy} + x\varphi_1(y) + \varphi_2(y)]\, dy.$$

Dans le cas de cette dernière fonction, Hermite démontre que la valeur

asymptotique de $\Phi(a)$ pour a très grand est

$$\mathfrak{I} = \frac{1}{2}\Delta\Phi(a)$$

en désignant par $\mathfrak{I}$ l'intégrale de Raabe généralisée

$$\mathfrak{I} = \int_0^1 \Phi(a+x)\,dx.$$

Hermite se sert de ce qui précède pour obtenir diverses expressions du terme complémentaire de la série de Stirling. Il applique aussi la formule d'interpolation (1) à la fonction $\zeta(s)$ de Riemann.

Pirondini (*G.*). — Résolution de deux questions de Géométrie (73-76).

1° Dans le plan osculateur en A à une courbe, on prend un point O. Quel doit être le lieu du point O dans le plan osculateur pour que la trajectoire du point O entraîné avec le trièdre de Serret de sommet A soit constamment normale au plan osculateur en A ?

2° Étude de la courbe dont les rayons de courbure et de torsion ρ, r sont liés par la relation

$$\rho = ae^{\cot\theta\int\frac{ds}{r}}$$

(a et θ constants). Propriétés diverses de cette courbe.

Pagliano (*C.*). — Sur les variétés algébriques à trois dimensions formées d'une simple infinité de plans (77-105).

L'auteur considère, dans un espace d'ordre quelconque, une variété simplement infinie de plans, le genre de la variété étant quelconque, et il se propose de déterminer les surfaces réglées qui ont une génératrice et une seule dans chacun des plans de la variété ainsi que les courbes qui ont un point et un seul dans chacun de ces plans. Les méthodes employées par l'auteur sont celles que M. Segre a introduites dans ses Mémoires de Géométrie algebrique (*Annali*, 2e série, t. XXII; *Mathem. Annalen*, t. XXX et XXXIV).

Bigiavi (*C.*). — Sur la réductibilité des équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques (107-139).

Dans un Mémoire sur une classe d'équations différentielles linéaires réductibles publié au Tome XIX, 2e série, des *Annali*, l'auteur a énoncé un théorème sur la réductibilité des équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques. Dans le travail actuel, il revient sur ce théorème dont la démonstration présentait une légère inexactitude et il en modifie l'énoncé ainsi qu'il suit :

Une équation différentielle linéaire réductible à coefficients elliptiques

admet toutes les intégrales d'une équation irréductible dont les coefficients doublement périodiques admettent pour périodes les périodes des coefficients de l'équation donnée ou des multiples convenablement choisis de ces périodes.

Inauguration du monument élevé à Francesco Brioschi à l'Institut technique supérieur de Milan (141-164).

Compte rendu de la cérémonie et texte des discours qui y ont été prononcés.

Bianchi (*L.*). — Sur la déformation des quadriques de révolution dans les espaces à courbure constante (165-219).

Ce Mémoire fait suite aux deux autres Mémoires de l'auteur parus aux Tomes III et IV des *Annali* : il a pour objet l'extension aux espaces à courbure constante des théorèmes de M. Guichard relatifs aux surfaces applicables sur les quadriques de révolution.

A cette déformation des quadriques de révolution se rattache une méthode de transformation des surfaces (α) de l'espace elliptique ou hyperbolique dont les rayons de courbure principaux r_1, r_2 en un point quelconque vérifient une équation de la forme

$$(\alpha) \qquad a r_1 r_2 + b(r_1 + r_2) + c = 0$$

à coefficients a, b, c constants. Parmi les surfaces parallèles à une surface (α) il y a toujours ou bien une surface à courbure constante, ou bien une surface à courbure moyenne constante, ou enfin une surface dans laquelle la somme des rayons de courbure principaux est constante et l'on peut se limiter à ces surfaces particulières.

Ceci posé, le théorème de M. Guichard, étendu à l'espace elliptique ou hyperbolique, donne les résultats suivants :

Dans l'espace elliptique, si l'on considère une quadrique S de révolution autour de l'axe focal et qu'on déforme cette quadrique de manière qu'elle entraîne avec elle dans la déformation les segments qui joignent un point de la quadrique à l'un de ses foyers, la surface $\bar{S}$, lieu des extrémités de ces segments primitivement réunies en un foyer, sera une surface à courbure moyenne constante.

Dans l'espace hyperbolique, il y a plusieurs espèces de quadriques de révolution autour de l'axe focal. Lorsqu'on déforme une de ces quadriques de révolution, la congruence des segments MF qui joignent un point M quelconque de la surface à un foyer F se déforme et le lieu des extrémités F est une surface $\bar{S}$ de la classe (α). Aux diverses espèces de quadriques de révolution correspondent diverses espèces de surfaces de la classe (α).

Réciproquement, toute surface $\bar{S}$ de la classe (α) peut être déduite d'une quadrique de révolution S, et cela d'une triple infinité de façons. Chacune de ces quadriques S fournit une surface $\bar{S}'$ symétrique de $\bar{S}$ par rapport à la quadrique S, et cette surface $\bar{S}'$ appartient à la même classe (α) que la surface $\bar{S}$. On a ainsi une méthode de transformation permettant de déduire d'une surface $\bar{S}$ de la classe (α) une infinité de surfaces appartenant à la même classe.

Des résultats précédents on peut déduire d'autres résultats relatifs à l'espace euclidien, par représentation conforme de l'espace non euclidien sur ce dernier espace. Les surfaces transformées des surfaces $\bar{S}$ vérifient une même équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme d'Ampère et l'on a ainsi une méthode de transformation des surfaces vérifiant cette dernière équation.

Levi-Civita (*T.*). — Sur quelques critères d'instabilité (221-307).

Cet important Mémoire a pour but l'étude de la stabilité des solutions périodiques des systèmes différentiels avec application au problème des trois corps. M. Levi-Civita ramène cette étude à celle de la stabilité des transformations ponctuelles dans le domaine d'un point double de la transformation et c'est cette dernière notion qu'il envisage tout d'abord.

Chapitre I. — *Notion de stabilité pour les transformations ponctuelles.* — Soit une transformation ponctuelle à m variables

$$(1) \qquad x_i^1 = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m), \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

analytique et régulière dans le domaine de l'origine qu'on suppose être un point double de la transformation. Soient $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ les points que la transformation (1) permet de déduire d'un point P par itérations successives et de même $P_{-1}, P_{-2}, \ldots, P_{-n}, \ldots$ les points successifs déduits de P par la transformation inverse de (1).

On dira qu'il y a *stabilité* dans le domaine de l'origine si la transformation (1) permet de faire correspondre à tout domaine E entourant l'origine un domaine H entourant l'origine et tel que P_n soit compris dans E, quel que soit n positif ou négatif, pourvu que P soit compris dans H. Il y a *instabilité* si, aussi petit que soit le domaine H, il y a dans ce domaine un point P tel que l'un au moins des points P_n qui lui correspondent ne soit pas contenu dans E.

Pour étudier la stabilité de la transformation (1), M. Levi-Civita considère la substitution linéaire qu'on en déduit lorsqu'on réduit les fonctions f_i à leurs termes du premier degré. Les racines ω de l'équation caractéristique relative à cette substitution linéaire jouent un rôle essentiel dans la question : M. Levi-Civita appelle ces racines les *multiplicateurs* de la transformation (1). Le résultat essentiel établi dans ce Chapitre est le suivant :

Si les multiplicateurs ne sont pas tous égaux à 1 *en valeur absolue, la transformation* (1) *est instable.*

Chapitre II. — *Transformations binaires dont les multiplicateurs sont égaux à* 1. — Dans la suite, l'auteur se limite au cas des transformations à deux variables. Il envisage le cas où les deux multiplicateurs sont égaux à 1 en valeur absolue. La transformation (1) se ramène alors à l'un des types suivants :

$$(A) \quad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y), \\ y_1 = y + g(x, y); \end{cases} \qquad (B) \quad \begin{cases} x_1 = x + f(x, y), \\ y_1 = y + x + g(x, y); \end{cases}$$

$$(C) \quad \begin{cases} x_1 = x\cos\theta - y\sin\theta + f(x, y), \\ y_1 = x\sin\theta + y\cos\theta + g(x, y), \end{cases}$$

$f(x, y)$ et $g(x, y)$ étant des fonctions d'ordre supérieur au premier.

Pour le type (C), l'auteur se limite au cas où θ est commensurable avec π : par un certain nombre d'itérations successives, le type (C) se ramène alors au type (A).

Pour les types (A) et (B), l'auteur démontre que, dans le cas général, il y a encore instabilité.

Chapitre III. — *Stabilité des solutions périodiques.* — Soit maintenant un système différentiel

$$(2) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

dans lequel les fonctions X_i sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$, périodiques, et de période T. par rapport à t. Soit Σ une solution périodique du système (2) avec la même période T. M. Levi-Civita montre que cette solution est stable ou instable en même temps qu'une certaine transformation ponctuelle S de la forme (1). Par un changement de variables, on peut toujours ramener la solution périodique Σ à la forme

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0.$$

La transformation S admet alors l'origine pour point double : pour l'obtenir, on considère l'intégrale générale du système (2) comme fonction des données initiales

$$x_i = F_i(x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_m'^0; t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et l'on pose

$$f_i(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0) = F_i(x_1'^0, x_2'^0, \ldots, x_m'^0 : T).$$

La transformation ponctuelle S, dont la stabilité ou l'instabilité entraîne la stabilité ou l'instabilité des solutions du système (2) est alors la transformation

$$(3) \qquad x_i^{(1)} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Pour appliquer les résultats des Chapitres I et II, il faut déterminer les multiplicateurs de la transformation (3) en partant du système (2). Après avoir déterminé ces multiplicateurs par l'emploi des équations aux variations du système (2), l'auteur montre que le théorème démontré au Chapitre I relativement à ces multiplicateurs fournit le théorème de M. Liapounoff d'après lequel une solution périodique est instable, si l'un au moins de ses exposants caractéristiques a une partie réelle non nulle.

Il reste à traiter le cas où tous les exposants caracteristiques ont leur partie reelle nulle. L'auteur se limite ici au cas de $m = 2$ et, en désignant par $i\alpha$, $-i\alpha$ les exposants caractéristiques, il suppose en outre que α soit commensurable avec $\frac{2\pi}{T}$. Les résultats du Chapitre II relatifs à l'instabilité des transformations (A) et (B) permettent alors de montrer qu'il y a encore en général instabilité pour le système différentiel donné.

Le cas particulier des solutions périodiques d'un système de quatre équations canoniques définissant en fonction du temps les variables canoniques p_1, q_1, p_2, q_2 rentre dans l'étude ainsi faite : deux des exposants caracteristiques

sont en effet nuls et les deux autres α, $-\alpha$ égaux et de signes contraires. En se limitant au cas où $\frac{\alpha}{i}$ est réel et commensurable avec le moyen mouvement $\frac{2\pi}{T}$, on démontre qu'il y a en général instabilité.

Chapitre IV. — *Application au problème des trois corps.* — M. Levi-Civita applique les méthodes précédentes à l'étude du problème *restreint* des trois corps. Parmi les solutions du problème, il y a ∞^1 solutions périodiques donnant lieu à des mouvements circulaires uniformes. Il y a ∞^2 solutions périodiques voisines de chacune de ces dernières. En première approximation, il semble que ces dernières solutions soient stables. Mais, à l'aide des résultats des Chapitres précédents, l'auteur parvient à démontrer en toute rigueur que pour une partie au moins d'entre elles il y a instabilité.

S. Lattès.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO (1).

Tome XLIX, 1913-1914.

Tonelli (*L.*). — [J 3 *a*] Sur la valeur d'un certain raisonnement (4-14).

Il s'agit du raisonnement par lequel on démontre l'existence du minimum dans le calcul des variations. Étant i la limite inférieure de l'intégrale I, on peut toujours trouver des courbes (en nombre infini) pour lesquelles

$$I < i + \frac{1}{k},$$

et soit C_k l'*une* d'entre elles. On a ainsi la succession (*minimisante*)

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$$

dont on prend la courbe limite. L'objection qu'on peut faire à ce procédé consiste à observer que la courbe C_k est choisie arbitrairement entre un nombre infini et non dénombrable d'éléments. L'auteur, en s'appuyant sur le théorème de M. Ascoli : *Le curve limiti*, etc. (*Mem. des Lincei*, 1883-1884) relatif aux successions de fonctions également continues, démontre que, dans les cas où l'intégrale à rendre minimum est une fonction semi-continue, on peut déterminer le choix des courbes C_k et, par suite, l'existence d'une succession minimisante est assurée.

Laura (*E.*). — [T 2 *a*] Sur les déformations par distorsion des solides élastiques isotropes de rotation (32-44).

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII$_2$, p. 161-171.

Déformations d'un solide limité par une partie de surface de rotation et par deux sections méridiennes σ_1, σ_2. L'auteur recherche les distributions des tensions intérieures qui donnent des tensions nulles à la surface et qui, sur une section σ de longitude θ, sont des fonctions linéaires de $\sin\theta$, $\cos\theta$. En supposant σ_1, σ_2 coïncidantes, c'est-à-dire le solide de forme annulaire, ces déformations coïncident avec les déformations par distorsion étudiées par M. Volterra (*Annales de l'École Normale supérieure*, t. XXIV, 1907), et leur détermination dépend de l'intégration de certains systèmes différentiels à deux variables indépendantes.

Somigliana (*C.*). — [V 9] Henri Poincaré. Commémoration (45-54).

Bompiani (*E*). — [H 9 *h*] Systèmes d'équations simultanées aux dérivées partielles à caractéristique (83-131).

La distinction qu'on fait des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre linéaires et homogènes, en *type parabolique* et *type non parabolique* (une telle distinction étant faite au point de vue purement projectif) peut s'étendre, sous certaines conditions, aux systèmes d'équations aux dérivées partielles.

Soient

$$(1)\qquad \sum_{1}^{k}{}_{il} A_{il}^{(s)} x^{il} + \sum_{1}^{k}{}_{i} B_i^{(s)} x^i + C^{(s)} x = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, \nu)$$

$\left(\text{où } x^i = \dfrac{\partial x}{\partial \tau_i},\ x^{il} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial \tau_i \partial \tau_l},\ \text{les } \tau_1, \ldots, \tau_k \text{ étant les variables indépendantes}\right)$ ν équations aux dérivées partielles. Dans l'espace S_k des coordonnées *non homogènes* $\tau_1, \ldots, \tau_k$ considérons les cônes quadratiques

$$\sum_{1}^{k}{}_{il} A_{il}^{(s)} T_i T_l = 0$$

ayant les génératrices parallèles aux normales des *hypersurfaces* caractéristiques intégrales de

$$\Phi^{(s)} f = \sum_{1}^{k}{}_{il} A_{il}^{(s)} \frac{\partial f}{\partial \tau_i} \frac{\partial f}{\partial \tau_l} = 0.$$

Le système (1) est appelé un *système à caractéristique* si les cônes considérés se décomposent en deux hyperplans dont l'un est fixe pour toutes les équations. Cet hyperplan fixe est appelé la *caractéristique* du système.

Une notion analogue a lieu pour un système d'ordre $n\,(\geq 2)$, où la partie commune aux cônes d'ordre n peut être un hyperplan ou un cône d'ordre $\nu - n - 1$.

L'étude des systèmes à caractéristique est faite au moyen d'une représentation géométrique. Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des solutions linéairement indépendantes. En considérant ces x_i comme coordonnées projectives *homogènes* d'un point x dans un espace S_n, comme ces x_i sont des fonctions de $k\,(\leq n)$ variables indé-

pendantes τ, le point x se meut sur une variété V_k (*variété intégrale* du système). L'auteur se propose de caractériser projectivement la variété V_k pour les systèmes à caractéristique du deuxième et du troisième ordre.

Dans les systèmes à caractéristique, le nombre ν des équations indépendantes est $\leq k$. Lorsque $\nu = k$, il y a nécessairement une équation du système qui a une *caractéristique double*, c'est-à-dire dont le cône correspondant se compose de l'hyperplan caractéristique du système compté deux fois. Un tel système est *parabolique*. Lorsque $\nu < k$ le système peut être parabolique ou *non parabolique*.

Dans tous les cas, il est possible, par une transformation de variables indépendantes, de donner aux équations du système à caractéristique la forme

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1}(a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k) + \alpha_{11} x^1 + \alpha_{12} x^2 + \ldots + \alpha_{1k} x^k + \alpha_{10} x = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial}{\partial \tau_\nu}(a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k) + \alpha_{\nu 1} x^1 + \alpha_{\nu 2} x^2 + \ldots + \alpha_{\nu k} x^k + \alpha_{\nu 0} x = 0,$$

où les groupes de termes contenant les dérivées les plus élevées sont les dérivées d'une même expression linéaire et homogène par rapport aux dérivées premières.

Relativement à la variété V_k, l'auteur trouve que, pour le système parabolique de k équations, à caractéristique, du deuxième ordre, elle est nécessairement réglée, avec le caractère de développable, c'est-à-dire ayant un S_k tangent fixe suivant chaque génératrice. Dans le système, auquel en ce cas on peut donner la forme

$$x^{11} + \alpha_{11} x^1 + \ldots + \alpha_{1k} x^k + \alpha_{10} x = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x^{1k} + \alpha_{k1} x^1 + \ldots + \alpha_{kk} x^k + \alpha_{k0} x = 0,$$

on peut toujours, par un changement de la variable τ_1, écrire la première équation sous la forme

$$x^{11} = 0.$$

Si la variété V_k représente les k équations et pas d'autres de même ordre et indépendantes de celles-ci, elle est un cône de première espèce pour $k \geq 3$. Pour $k = 2$ elle peut être une développable ordinaire. On en déduit que, par un changement de variables, on peut toujours, pour $k \geq 3$, donner à une intégrale du système la forme

$$x(\tau_1, \ldots, \tau_k) = A + \tau_1 B(\tau_2, \ldots, \tau_k) \qquad (A = \text{const.}),$$

et, pour $k = 2$, aussi la forme

$$x(\tau_1, \tau_2) = A(\tau_2) + \tau_1 \frac{dA}{d\tau_2}.$$

Suit l'exposé analogue du cas où $\nu < k$; puis celui de plusieurs groupes d'équations ayant chacun une caractéristique. Ensuite le cas des systèmes à caractéristique, du deuxième ordre et de type non parabolique, et celui des équations du troisième ordre.

Poli (*C.*) — [C 2 *a*] Sur la démonstration de l'intégrabilité des fonctions continues (132-134).

Démonstration de l'existence de l'intégrale définie sans avoir recours à la continuité uniforme.

Albenga (*G.*). — [T 2 *d*] Sur certaines théories approchées de la plaque plane (150-163).

Terracini (*A.*) — [Q 2] Sur certaines questions concernant les espaces tangents et osculateurs à une variété. Note I (214-247).

Les plans tangents à une variété V_k d'un espace S_n forment en général une variété W de dimension $2k$; mais il peut arriver que deux espaces tangents infiniment rapprochés, au lieu d'avoir un seul point commun, se rencontrent suivant un $S_l (l > 0)$ et que, par conséquent, la dimension de la variété W soit $2k - l$. Cela peut être une conséquence du fait que la variété V_k vérifie un système de

$$\frac{k(k+3)}{2} - 2k + l = \frac{k(k-1)}{2} + l$$

équations de Laplace, c'est-à-dire que les coordonnées homogènes d'un point de V_k, fonctions de k variables $\tau_1, \ldots, \tau_k$, soient des solutions du système mentionné.

L'auteur se propose de trouver toutes les variétés V_k qui ont la propriété indiquée sans qu'elle soit une conséquence du nombre d'équations de Laplace vérifiées, et trouve que :

Si W est de dimension $2k - l$, la variété V_k vérifie un nombre

$$d = lk - \frac{l(l-1)}{2}$$

d'équations de Laplace; lorsque d a sa valeur minimum, la V_k est un S_{l-1} cône générique, qui projette d'un S_{l-1} une V_{k-l} qui ne vérifie aucune équation de Laplace. Et réciproquement.

Poli (*C.*). — [D 3] Sur les intégrales étendues au contour d'un champ quelconque (248-260).

Bottasso (*M.*). — Sur la détermination du taux d'une rente temporaire, variable et continue (268-290).

Segre (*C.*). — [N_2 1] Sur les congruences rectilignes W dont l'une ou les deux nappes focales sont réglées (291-303).

Si une congruence ayant pour nappes focales deux surfaces gauches R, S fait correspondre à un système d'asymptotiques (courbes) de S un système de géné-

ratrices rectilignes de R, la surface R est une quadrique et deux de ces génératrices sont directrices pour S. La congruence fait correspondre aux génératrices rectilignes de S l'autre système de génératrices de R.

Vercelli (*E.*). — [T 4 *c*] Sur le gradient thermique à la surface des planètes et sur leur température intérieure (342-369).

Bottasso (*M.*). — Sur certaines extensions du théorème de Guldin (576-598).

Résultats obtenus au moyen du calcul vectoriel.

Cherubini (*S.*). — [M_1 4 *d*] Sur les courbes hyperelliptiques avec des transformations birationnelles singulières en elles-mêmes et sur leurs modules algébriques (705-726).

Le travail se compose de deux parties. Dans la première, l'auteur recherche les courbes hyperelliptiques mentionnées dans le titre. Comme deux courbes hyperelliptiques sont birationnellement identiques lorsque leurs *groupes de diramation* qui les représentent sur une droite double sont projectifs, la recherche est réduite à celle des formes binaires admettant des groupes projectifs en elles-mêmes et qui sont données par la formule de Klein

$$f(x_1, x_2) = F_1^{\alpha} F_2^{\beta} F_3^{\gamma} \Pi_i (F_1^{\gamma_1} + \alpha_i F_2^{\gamma_2}).$$

Comme il faut avoir des formes projectivement distinctes pour que les courbes soient birationnellement distinctes, il faut construire les groupes projectifs changeant en eux-mêmes les groupes polyédriques. De cette manière, l'auteur obtient des types de courbes pour chacun des groupes polyédriques et détermine, pour chacun des cas, le nombre des modules et le genre du groupe.

Dans la seconde partie, il détermine les modules algébriques des courbes, problème équivalent à la détermination des périodes normales des intégrales de première espèce sur des coupures données.

Ricci (*C.-L.*). — [R 9] Sur le frottement dans les freins et les pivots (762-785). Note II (967-986).

Fubini (*G.*). — [O 5] Définition projectivo-différentielle d'une surface (786-802).

L'auteur a pour but de trouver, pour l'étude d'une surface dans le groupe projectif, un moyen analogue à celui qui fait dépendre l'étude métrique d'une surface de la considération des deux formes différentielles quadratiques.

Après avoir démontré que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une correspondance entre deux surfaces S, Σ soit une projectivité, est qu'aux sections planes de S correspondent les sections planes de Σ, il se propose le problème suivant :

« Étant donnée l'équation

$$c = \varphi(u; a, b, c)$$

des sections planes de S (où a, b, c sont des paramètres), trouver les équations paramétriques de la surface. » Certaines conditions de possibilité étant satisfaites, le problème se résout uniquement par des quadratures.

Pour les sections planes, on a en coordonnées projectives

$$\Lambda = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 & dx_4 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 & d^2x_4 \\ d^3x_1 & d^3x_2 & d^3x_3 & d^3x_4 \end{vmatrix} = 0;$$

cette forme Λ détermine ainsi (projectivement) la surface correspondante. La signification géométrique de Λ est donnée par

$$\Lambda = -\frac{1}{T}\frac{1}{R^2}\,ds^6.$$

Entre les résultats obtenus comme applications, citons les suivants :

Les lignes asymptotiques sont conservées par collinéation. Une collinéation ne change pas les valeurs de $\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}$ pour l'élément linéaire rapporté aux lignes asymptotiques.

Si entre deux surfaces il y a une correspondance biunivoque conservant les asymptotiques $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, et si elles se coupent suivant deux asymptotiques, elles coïncident si les symboles $\begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}$, $\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}$ ont mêmes valeurs pour les deux surfaces.

Torelli (*R.*). — [M_2 8] Un critérium d'équivalence pour les courbes d'une surface algébrique (845-858).

Si deux courbes A, B déterminent des groupes équivalents sur les courbes d'un système ∞^1 (irréductible) Σ, dépourvu de points multiples variables, elles sont équivalentes ou bien elles diffèrent par des courbes fondamentales de Σ.

La démonstration est fondée principalement sur une extension aux surfaces d'une propriété que l'auteur même a démontrée relativement aux correspondances rationnelles entre deux courbes (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXXVI, 1914, § VII).

Pensa (*A.*). — [B 12] Sur la résolution d'équations vectorielles et homographiques (987-1012).

Étant

$$u(P) = \text{const.}$$

un système de surfaces, les conditions pour que chacun des deux systèmes de lignes asymptotiques admette des surfaces orthogonales (conditions déterminées par Kleraval, *C. R. Acad. Sc.*, t. 157, 1913) se trouvent en éliminant x entre

les équations

$$x \times \text{grad.}\, u = 0,$$

$$x \times \frac{d\,\text{grad.}\, u}{dP}\, x = 0,$$

$$x \times \text{rot.}\, x = 0.$$

L'auteur fait la détermination de x au moyen des deux premières équations.

Un autre système d'équations vectorielles, résolu par l'auteur, est

$$\alpha x + \gamma y = u,$$

$$K\gamma x + \beta y = v,$$

α, β étant des dilatations, γ une homographie quelconque et u, v des vecteurs.

Pour les fonctions vectorielles homogènes a lieu le théorème d'Euler, au moyen duquel l'auteur démontre que, si les points M, N varient dans un champ à trois dimensions et O est un point fixe, la fonction numérique homogène quadratique la plus générale des vecteurs M — O, N — O est

$$(M - O) \times \alpha(M - O) + 2(M - O) \times \gamma(N - O) + (N - O) \times \beta(N - O),$$

α, β étant des dilatations et γ une homographie générale.

Puis l'auteur trouve sous forme vectorielle les intégrales des équations différentielles du mouvement d'un corps plongé dans un fluide.

Suit la résolution d'équations homographiques.

Pensa (*A.*). — [B 12 ref. M. 8] Quelques applications des formules de Frenet (1135-1161).

Applications de ces formules, sous forme vectorielle, aux questions suivantes :

Une section normale d'un cylindre étant fixée, et en faisant mouvoir un point sur cette section, de manière que l'un des vecteurs fondamentaux t, n, b (vecteurs unitaires tangent, normal et binormal) fasse un angle constant avec un des vecteurs analogues de la section, étudier les courbes engendrées par ce point.

Étude des courbes de *poursuite*, la courbe fondamentale étant quelconque, plane ou gauche.

Conchoïdes et cissoïdes de courbes gauches *antidéveloppantes* d'une courbe.

Cette dernière courbe est définie comme il suit :

Un point Q décrit une courbe dont l'arc est σ. Le point

$$R = Q - \sigma t$$

décrit une développante et le point

$$P = Q + \sigma t,$$

symétrique de R par rapport à Q, décrit une autre courbe que l'auteur appelle *antidéveloppante*.

Favaro (*G.-A.*). — [U] L'instrument des passages *Heyde* du Cabinet de Géodésie de l'Université Royale de Turin (1162-1173).

S. Rindi.

ANNALI DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA [1].

Série III, t. VI, 1901.

Dall'Acqua (*A.*). — Sur la théorie des congruences de courbes dans une variété quelconque à trois dimensions (1-41).

Ce travail se rattache au Mémoire de M. Ricci *Sur les systèmes de congruences orthogonales* (*Memorie Lincei*, 5e série, t. V). La signification géométrique de certains invariants qui se présentent dans ce Mémoire de M. Ricci est étroitement liée à un élément nouveau envisagé par l'auteur, élément qui est le complexe de toutes les congruences orthogonales à la congruence donnée, ou *complexe orthogonal*. A toute congruence sont ainsi associées ses trajectoires orthogonales et l'on peut définir pour l'élément ainsi introduit les notions de courbure, de ligne géodésique, de ligne de courbure, etc.

Les méthodes et les notations employées sont celles du *Calcul différentiel absolu* de M. Ricci. Bien qu'il ait surtout en vue les congruences de l'espace euclidien, l'auteur se place dans le cas d'un espace *quelconque* à trois dimensions afin de bien montrer que les propriétés qu'il a en vue sont indépendantes de la courbure de l'espace et ne dépendent que de son élément linéaire.

Nous reproduirons ici la Table des matières du Mémoire :

Chap. I. — Rotations et courbures. Lignes orthogonales canoniques et bissectrices de ces lignes. Géodésiques des complexes orthogonaux. Congruences binormales et normales principales. Première et seconde courbure d'une congruence. Torsion géodésique sur le complexe.

Chap. II. — Lignes de courbure, courbures principales, théorème de Dupin-Darboux généralisé. Courbure moyenne et courbure totale. Courbures canoniques et généralisation de la formule d'Euler. Indicatrices de courbure. Indicatrices de torsion. Lignes asymptotiques et extension du théorème d'Enneper.

Chap. III. — Angle des lignes de courbure et points extrêmes. Points limites et angle des asymptotiques. Points de courbure totale nulle. Points circulaires. Points focaux. Point moyen et équation de la surface moyenne.

Chap. IV. — Définition de la congruence *associée*. Quelques formules auxiliaires. Problème des associations d'ordre n. Cas spécial des congruences isotropes. Autre forme de la solution générale.

Chap. V. — Congruences géodésiques. Congruences normales et théorème sur les surfaces moyennes. Surfaces isothermes. Système triple de congruences orthogonales canoniques. Congruences isotropes. Congruences pseudosphériques.

Nielsen (*Niels*). — Évaluation nouvelle des intégrales indéfinies et des séries infinies contenant une fonction cylindrique (43-115) [en français].

---

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXIX, p. 54-71.

Première Partie. — *Généralisation des fonctions cylindriques. Applications.* — Soit une fonction $B^{\mu}(x)$ assujettie à vérifier les deux équations fonctionnelles suivantes :

$$B^{\mu-1}(x) - B^{\mu+1}(x) - 2D_x B^{\mu}(x) = \frac{2}{x} f^{\mu}(x),$$

$$B^{\mu-1}(x) + B^{\mu+1}(x) - \frac{2\mu}{x} B^{\mu}(x) = \frac{2}{x} g^{\mu}(x),$$

où $f^{\mu}(x)$, $g^{\mu}(x)$ sont deux fonctions données de μ et de x qui doivent nécessairement satisfaire à la condition

$$g^{\mu-1}(x) - g^{\mu+1}(x) - 2D_x g^{\mu}(x) = f^{\mu-1}(x) + f^{\mu+1}(x) - \frac{2\mu}{x} f^{\mu}(x)$$

qu'on déduit aisément des deux équations fonctionnelles.

La fonction $B^{\mu}(x)$ généralise la fonction cylindrique $C^{\mu}(x)$ avec laquelle elle coïncide lorsqu'on suppose $f^{\mu}(x) = g^{\mu}(x) = 0$. Elle vérifie une équation différentielle de la forme

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) y = \frac{1}{x} \omega^{\mu}(x),$$

où $\omega^{\mu}(x)$ dépend de $f^{\mu}(x)$ et de $g^{\mu}(x)$.

L'intégrale

$$\int \omega^{\mu}(x) C^{\mu}(x)\, dx,$$

où $\omega^{\mu}(x)$ désigne une fonction donnée de μ et de x et $C^{\mu}(x)$ une fonction cylindrique qui peut être représentée simplement à l'aide des fonctions $B^{\mu}(x)$.

En particulier, si l'on suppose $\omega^{\mu}(x)$ égal à x^{ν}, ou encore à $x^{\nu} e^{ix}$ et si l'on particularise de diverses façons les paramètres μ et ν, on obtient des fonctions $B^{\mu}(x)$ qui coïncident avec certaines fonctions spéciales connues : on retrouve, en particulier, diverses formules et diverses fonctions introduites par Lommel, Schläfli, Neumann, etc., et entre autres les fonctions *besséliennes* de deuxième espèce.

Deuxième Partie. — *Séries neumanniennes de première espèce. Applications.* — Une série de Laurent est toujours transformable en série de fonctions cylindriques par la formule

$$\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} b_s x^s = \left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} a_n J^{\mu+n}(x).$$

Les coefficients a_n sont liés aux coefficients b_s par des formules qu'indique l'auteur; le paramètre μ ne doit pas être égal à un nombre entier; la série de fonctions cylindriques obtenue est convergente dans la région du plan des x où la série de Laurent est elle-même convergente; l'auteur propose de désigner cette série de fonctions cylindriques sous le nom de *serie neumannienne de première espèce.*

Soit maintenant une fonction de la forme $f(y - x)$ supposée développable en série de Taylor. L'auteur donne pour cette fonction un développement en série de fonctions cylindriques de x, les coefficients étant des fonctions de y, et il retrouve ainsi par une méthode uniforme différentes formules dues à Neumann, Lommel, Schläfli, Graf.

Enfin, l'auteur rattache les séries neumanniennes aux fonctions sphériques. Le Mémoire se termine par le développement en série neumannienne de la fonction de r,

$$(R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2)^{-\frac{\mu}{2}} C^{\mu}\left(\sqrt{R^2 - 2Rr\cos\varphi + r^2}\right),$$

où C^{μ} est une fonction cylindrique quelconque de paramètre μ. Ici encore on retrouve diverses formules connues.

Bianchi (*L.*). — Sur la déformation des congruences et sur quelques classes de surfaces applicables (117-164).

M. Bianchi a étudié précédemment (*Annali*, 3e série, t. III, IV et V) certains problèmes relatifs aux surfaces applicables sur les quadriques de révolution en les rattachant à la théorie de la déformation des congruences rectilignes normales. La déformation était entendue *au sens de Beltrami*, c'est-à-dire que chaque rayon de la congruence était défini par son point de départ sur une surface qui se déformait et était considéré comme invariablement lié à l'élément de surface d'où il partait. L'auteur envisage maintenant un nouveau mode de déformation des congruences, corrélatif du précédent, et qui constitue la déformation *au sens de Ribaucour* : la surface de départ Σ est définie par l'ensemble de ses plans tangents, chaque rayon de la congruence est considéré comme invariablement fixé dans un plan tangent à la surface Σ et entraîné avec ce plan tangent, lorsque la surface se déforme. Ici encore, comme dans la déformation au sens de Beltrami, si la congruence C est une congruence de normales et si le point M pris sur chaque rayon a pour lieu une surface S normale aux divers rayons, cette surface S lieu de M demeure normale aux divers rayons dans toutes les déformations de la congruence. Ceci posé, on peut se proposer le problème suivant analogue au problème (A) étudié précédemment (*Annali*, t. III) :

Problème (B). — *Comment doit-on choisir la surface Σ et la congruence normale* C *pour qu'une surface* S *normale aux rayons de* C *soit constamment une surface minima, ou une surface à courbure constante, dans toutes les déformations de* Σ ?

Ce problème admet d'abord comme solutions toutes les congruences C déjà obtenues comme solutions du problème (A) relatif à la déformation au sens de Beltrami. On obtient aussi comme surfaces Σ les développées des surfaces minima et des surfaces à courbure constante ainsi que les surfaces complémentaires des surfaces à courbure constante par rapport aux géodésiques issues d'un point. En dehors de ces diverses solutions qu'on peut obtenir *a priori*, il en existe d'autres et la recherche analytique de toutes les solutions conduit M. Bianchi aux conclusions suivantes :

a. Si la surface S doit être constamment minima, les surfaces Σ solutions du problème (B) sont, outre les développées des surfaces minima, celles qui ont pour élément linéaire

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + (2u - 2v + ae^{-2v})\,dv^2,$$

où a est une constante arbitraire. Pour $a \neq 0$, on trouve ainsi la classe de surfaces applicables déterminée complètement par Weingarten.

b. Si la surface S doit avoir une courbure constante $\frac{1}{\Lambda}$, le problème (B), en dehors des solutions déjà signalées plus haut, possède deux catégories distinctes de solutions caractérisées respectivement par l'élément linéaire

$$\text{(II)} \qquad ds^2 = e^{2\tau} du^2 + \left(a\Lambda + ke^{-2v} - \frac{a}{a+1} e^{2\tau}\right) dv^2,$$

où l'on a posé $\tau = av - (a+1)u$ et où a et k sont des constantes arbitraires ($a \neq 0 \neq -1$), et par l'élément linéaire

$$\text{(III)} \qquad ds^2 = e^{-2v} du^2 + [2(v-u)e^{-2v} - \Lambda] dv^2.$$

Les éléments (II) et (III) appartiennent aux quadriques imaginaires tangentes en un point au cercle de l'infini, quadriques introduites par M. Darboux dans l'étude de la déformation des quadriques (*Comptes rendus*, mars 1899); l'élément (III) correspond au cas où la quadrique de M. Darboux est osculatrice au cercle de l'infini.

M. Bianchi traite ensuite le problème inverse, c'est-à-dire qu'étant donnée une surface S minima, ou à courbure constante, il se propose de construire les surfaces Σ d'où l'on a déduit la surface S considérée. A chaque surface S correspondent ∞^3 surfaces Σ. La recherche des surfaces Σ dérivées d'une surface S donnée dépend d'un système intégrable d'équations aux dérivées partielles. Dans le cas de l'élément linéaire (III), ce système a une interprétation géométrique remarquable, dans laquelle interviennent les systèmes triples orthogonaux les plus généraux pour lesquels l'une des trois familles de surfaces du système est formée de surfaces à courbure constante : une construction géométrique simple permet de déduire de ces systèmes les surfaces Σ admettant l'élément linéaire (III).

Castelnuovo (*G.*) et *Enriques* (*F.*). — Sur quelques questions fondamentales dans la théorie des surfaces algébriques (165-225).

Cet important Mémoire contient, avec des résultats nouveaux, un exposé des recherches antérieures des deux auteurs sur la théorie des surfaces algébriques. Le lecteur en trouvera une analyse détaillée dans la Note publiée par les auteurs à la fin du Tome II de la *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* de MM. Picard et Simart.

Les développements nouveaux introduits dans ce Mémoire sont basés sur la notion des *systèmes adjoints successifs* d'un système linéaire de courbes tracé sur une surface. Soient $|C|$ un système linéaire, $|C'|$ son adjoint, $|C''|$ l'adjoint de $|C'|$ et ainsi de suite. MM. Castelnuovo et Enriques ont cherché dans quels cas la série

$$|C|, \quad |C'|, \quad |C''|, \quad \ldots, \quad |C^{i}|, \quad \ldots$$

s'arrête à un dernier terme. Ils démontrent à ce sujet le théorème fondamental suivant :

Toute surface sur laquelle le procédé d'adjonction s'épuise par un nombre fini d'opérations peut être transformée birationnellement en une surface réglée, rationnelle ou non.

On en déduit, entre autres conséquences, le résultat suivant :

Toute surface qui contient un système linéaire de courbes de dimension ≥ 0, *de genre* $\pi > 0$ *et de degré* $n > 2\pi - 2$ *peut être transformée en une surface réglée.*

Pour $\pi = 1$, $\pi = 2$, on retrouve des résultats connus. Pour $\pi = 3$, on obtient un résultat nouveau :

« Une surface d'ordre 4, dont les sections planes ont le genre 3, est rationnelle, ou réglée, ou enfin transformable en une surface réglée de genre 1 ou 2. »

Parmi les autres conséquences du théorème fondamental, signalons la détermination des conditions pour qu'une surface puisse être transformée en une surface réglée. On en déduit en particulier les conditions connues de rationalité d'une surface.

Enfin, le Mémoire contient divers développements relatifs à l'invariant appelé *genre linéaire*.

Dell'Agnola (*C.-A.*). — Sur les séries de polynomes qui représentent une branche de fonction analytique monogène (227-248).

Un théorème fondamental dû à M. Mittag-Leffler nous apprend que toute fonction analytique, définie par son développement en série de Taylor en un point régulier a, peut être représentée par une série de polynomes qui converge dans toute l'*étoile* relative au point a.

M. Dell' Agnola se pose en quelque sorte le problème inverse : étant donnée une série de polynomes, définir un champ (étoile) dans lequel elle soit convergente et ait pour somme une branche de fonction analytique monogène.

Les séries de polynomes envisagées par l'auteur dans ce Mémoire sont des séries de la forme

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n(x) x^n,$$

où les coefficients $a_n(x)$ sont des polynomes en x sur l'ensemble desquels on fait seulement l'hypothèse suivante : en posant $x = u + iv$ et en désignant par $\alpha(u, v)$ la plus grande limite de l'ensemble des nombres $\left|\sqrt[n]{a_n(x)}\right|$, on suppose qu'il existe un domaine entourant l'origine et dans lequel cette fonction $\alpha(u, v)$ demeure bornée.

On peut alors définir sur chaque rayon issu de l'origine O une certaine longueur $OP = r_\theta$, finie ou infinie, fonction de l'angle polaire θ, l'ensemble des nombres r_θ ayant une borne inférieure non nulle, de façon que l'*étoile* S, lieu des points P ainsi obtenus, constitue un domaine de convergence absolue pour la série (1).

On peut aussi définir une seconde étoile Σ contenue dans S et telle que la série (1) soit uniformément convergente dans tout domaine fini intérieur à l'étoile Σ. La série (1) représente dans l'étoile Σ une branche de fonction analytique monogène.

L'auteur applique ces propositions aux trois exemples suivants et il déter-

mine dans chaque cas les étoiles S et Σ :

1° $$\sum (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})^n x^n ;$$

2° $$\sum (1 - x)^n x^n ;$$

3° $$\sum (2c - x)^n x^n \qquad (c \text{ réel et } > 0).$$

Pensa (*A.*). — Sur les surfaces rationnelles du cinquième ordre (249-287).

L'auteur détermine des types de surfaces rationnelles du cinquième degré encore inconnus, types dont les singularités ne sont pas toutes constituées par des lignes multiples ordinaires. Il s'appuie dans cette recherche sur le théorème de M. Castelnuovo : *pour qu'une surface soit rationnelle, il faut et il suffit que son genre arithmétique p_n et son bigenre* P *soient nuls*. M. Pensa cherche d'abord l'influence de diverses singularités sur p_n et sur P, pour une surface quelconque. Passant aux surfaces du cinquième ordre, il classe les points multiples et les lignes multiples qu'elles peuvent avoir d'après leur influence sur p_n qui peut être diminué de 1, 2, 3 ou 4 unités suivant les cas, puis il combine ces singularités de façon que p_n soit réduit à zéro ainsi que P. Il obtient ainsi les surfaces rationnelles cherchées.

Lauricella (*G.*). — Sur la déformation d'une sphère élastique isotrope pour des déplacements donnés à la surface (289-299).

Dans le problème de la déformation d'une sphère isotrope pour des déplacements donnés à la surface, M. Lauricella applique au problème général la méthode qu'il avait donnée dans un Mémoire antérieur pour certains déplacements particuliers à la surface (*Annali della Scuola Normale superiore di Pisa*, t. VIII). Il obtient ainsi les formules qui donnent les composantes de la déformation. Des formules analogues sont valables pour la portion de l'espace extérieure à la sphère. Comme application de ces formules, l'auteur donne les développements en série de fractions rationnelles des composantes de la déformation dont la possibilité a été établie par M. Somigliana (*Annali*, 2e série, t. XVII).

Nielsen (*Niels*). — Sur une classe de séries infinies analogues à celles de Schlömilch selon les fonctions cylindriques (301-329) [en français].

Ce Mémoire est surtout consacré à l'étude de certaines séries procédant suivant des produits de fonctions cylindriques et dont la somme est constamment nulle, lorsque les variables restent à l'intérieur de certains domaines.

L'auteur donne d'abord divers remarquables développements en série relatifs

aux fonctions

$$F(x) = \int_0^a \cos(x\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$\mathcal{F}(x) = \int_0^a \sin(x\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Signalons, entre autres développements, le suivant :

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} F(sx) = -\frac{1}{2} F(0) + \frac{\pi}{2\pi} f(0)$$

valable pour $0 < ax < 2\pi$. Plus généralement, si l'on suppose

$$2q\pi < |ax| < (2q+2)\pi,$$

on a

$$\sum_{s=1}^{s=\infty} F(sx) = -\frac{1}{2} F(0) + \frac{\pi}{|x|} \sum_{p=0}^{p=q}{}' f\left(\frac{2p\pi}{|x|}\right),$$

où l'accent qui suit le second signe $\sum$ indique que, lorsque $|ax|$ est égal à $2q\pi$, il faut prendre la moitié des termes qui correspondent à $p=0$ et à $p=q$. La somme de la série $\sum F(sx)$ est donc une fonction discontinue de x.

On a aussi

$$\sum_{s=0}^{s=\infty} (-1)^s \mathcal{F}[(2s+1)] = 0$$

dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} < ax < \frac{\pi}{2}$ et l'on obtient ainsi une série représentant zéro dans tout un intervalle.

Des développements analogues s'appliquent aux fonctions

$$G(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \cos\omega \sin\varphi) f(\omega, \varphi)\, d\omega\, d\varphi,$$

$$\mathcal{G}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x \cos\omega \sin\varphi) f(\omega, \varphi)\, d\omega\, d\varphi.$$

En appliquant ces développements à diverses fonctions de la théorie des fonctions cylindriques, l'auteur obtient des séries dont la somme s'exprime à l'aide d'intégrales elliptiques ou hyperelliptiques.

Parmi les nombreux résultats énoncés par l'auteur signalons encore celui-ci :

Un développement en série de fonctions cylindriques de la forme

$$\left(\frac{2}{x}\right)^{\mu} \sum a_n J^{\mu}(nx),$$

valable dans l'intervalle $0 < x < \pi$, peut être effectué d'une infinité de façons, pourvu que la partie réelle de μ soit supérieure à $\frac{3}{2}$.

Les intégrales bessèliennes

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x \sin\omega) \cos\mu\omega \, d\omega, \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin\omega) \sin\mu\omega \, d\omega,$$

ainsi que d'autres intégrales analogues, considérées comme fonctions du paramètre μ, rentrent dans la catégorie des fonctions $F(x)$, $\mathfrak{F}(x)$. L'auteur leur applique les résultats établis plus haut. Il en est de même de la fonction

$$J^{n+\mu}(x) J^{n-\mu}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J^{2n}(2x \cos\omega) \cos 2\mu\omega \, d\omega,$$

où n est la moitié d'un nombre entier non négatif. On en déduit les développements en série auxquels nous faisions allusion au début de cette analyse.

Nielsen (*Niels*). — Sur une classe de polynomes qui se présentent dans la théorie des fonctions cylindriques (deuxième Partie) (331-340) [en français].

La première Partie de ce Mémoire a été publiée dans les *Annali* (3e série, t. V). L'auteur y a considéré un polynome qu'il désignait par la notation $R^{\mu,\nu}(x)$. Ce polynome vérifie une équation différentielle linéaire et homogène qui a été donnée par M. Hurwitz et que l'auteur démontre ici en partant des formules de Lommel démontrées dans la première Partie. Il établit ensuite des formules de récurrence pour le calcul des polynomes $R^{\mu,n}$. Enfin, il se sert de ce polynome pour résoudre l'équation aux différences finies

$$G^{n-1}(x) + G^{n+1}(x) = \frac{2n}{x} G^n(x) + \frac{2}{x} g^n(x),$$

où $g^n(x)$ est une fonction donnée. De là résultent un certain nombre de formules contenant les polynomes R et les fonctions $O^n(x)$ et $S^n(x)$ de Neumann et de Schläfli.

Série III, t. VII, 1902.

Pascal (*E.*). — Introduction à la théorie invariantive des équations aux différentielles totales du second ordre de type général (Mémoire I) (1-37).

L'auteur a déjà étudié, dans divers travaux antérieurs, certaines équations aux différentielles totales du second ordre dans le but d'étendre à ces équations les propriétés les plus importantes des systèmes d'équations aux différentielles totales du premier ordre. Mais les équations envisagées étaient d'un type spé-

cial obtenu en considérant comme nulles les différentielles secondes de certaines des variables.

Le Mémoire actuel est consacré aux équations du type général suivant, contenant les différentielles secondes de toutes les variables :

$$(1) \qquad \sum_{k=1}^{n} X_k\, d^2 x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij}\, dx_i\, dx_j = 0 \qquad (X_{ij} = X_{ji}),$$

où les X sont des fonctions données des x.

Un système de m équations de la forme (1) est dit *complètement intégrable* s'il existe m fonctions des variables x telles que le système des différentielles secondes de ces fonctions égalées à zéro soit équivalent au système des m équations données.

L'auteur détermine en premier lieu les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité complète de l'équation (1) ou d'un système d'équations de la forme (1).

Le premier membre de (1) est dit *forme aux différentielles totales secondes*. De même, étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \qquad (\xi_{ij} = \xi_{ji}),$$

où les ξ sont des fonctions des x, le premier membre sera dit *forme aux dérivées partielles* du second ordre. Si l'on effectue une même transformation ponctuelle remplaçant les variables x par de nouvelles variables y, sur la forme (1) et sur la forme (2), elles se transforment en des formes de même espèce. L'auteur démontre que l'expression

$$A = \sum X_k \xi_k + \sum \sum X_{ij} \xi_{ij}$$

est un invariant simultané des formes (1), (2) pour toute transformation ponctuelle, propriété qui généralise une proposition bien connue de la théorie des formes aux différentielles totales du premier ordre.

A tout système de m équations ($m < n$) de la forme (1), l'auteur fait correspondre un système d'équations aux dérivées partielles de la forme (2) qu'il appelle *système adjoint* au système donné et qui généralise la notion analogue relative aux équations du premier ordre. Ce système est formé de telle sorte que tous les invariants A formés à partir d'une équation quelconque du système donné et d'une équation quelconque du système adjoint soient nuls, ce qui est possible. Il contient $\frac{n(n+3)}{2} - m$ équations indépendantes. Si le système donné est complètement intégrable, les équations du système adjoint admettent m intégrales communes et m seulement.

On peut ensuite étendre aux systèmes d'équations aux dérivées partielles de la forme (2) la notion de *système complet* et définir des symboles qui généralisent les parentheses de Poisson.

Étant donné un système d'équations aux différentielles totales du premier ordre, les premiers membres des équations du système adjoint définissent des transformations infinitésimales et l'on sait que la condition nécessaire et suffi-

sante pour que ces transformations infinitésimales prolongées laissent invariantes les équations du système donné est que ce système soit complètement intégrable. L'auteur étend cette proposition aux systèmes d'équations du second ordre de la forme (2). Il montre d'abord comment on peut généraliser la notion de transformation infinitésimale, ou, ce qui revient au même, d'*opérateur* du premier ordre, et définir des opérateurs du second ordre contenant des symboles tels que $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, puis il montre ce qu'il faut entendre par appliquer un pareil opérateur au premier membre d'une équation aux différentielles totales du second ordre. Cela posé, il considère un système d'équations aux différentielles totales résolu par rapport à m des différentielles du second ordre et le système adjoint, et il démontre le théorème suivant, qui généralise la proposition relative aux équations du premier ordre rappelée plus haut :

« La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de m équations aux différentielles totales du second ordre soit complètement intégrable est qu'il demeure invariant par toutes les opérations du faisceau obtenu en formant une combinaison linéaire (dont les coefficients soient des fonctions arbitraires) des opérations représentées par le système adjoint au système donné. »

Lovett (*E.-O.*). — Les transformations de contact entre les éléments fondamentaux de l'espace (39-98) [en français].

Ce Mémoire contient la détermination des catégories suivantes de transformations de contact :

1° Transformations de contact de l'espace à n dimensions qui changent les points en points et les plans en plans. Ce sont les transformations projectives.

2° Transformations de contact de l'espace à n dimensions qui changent les plans en plans. Les mêmes transformations changent une développable quelconque en développable.

3° Transformations de contact transformant les lignes droites en sphères. On retrouve, en particulier, la transformation de Lie.

4° Transformations de contact de l'espace à n dimensions transformant les sphères en sphères.

5° Transformations de contact transformant les lignes asymptotiques en lignes de courbure.

6° Transformations de contact transformant les lignes asymptotiques en lignes asymptotiques. Ce sont les transformations du groupe projectif.

La plupart des résultats obtenus sont connus depuis longtemps par d'autres méthodes. Mais le but du Mémoire est la détermination par le calcul de *toutes* les transformations des diverses catégories étudiées. M. Lovett se sert pour cela soit des équations de définition des transformations de contact sous forme finie, soit des transformations infinitésimales de contact, soit des relations qui expriment qu'une transformation entre l'élément

$$(z; x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

et l'élément

$$(Z; X_1, X_2, \ldots, X_n; P_1, P_2, \ldots, P_n)$$

est une transformation de contact, relations connues par les travaux de Lie, Darboux et Mayer.

Marcolongo (*R.*). — Théorie du gyroscope symétrique pesant (99-128).

Étude élémentaire et complète du mouvement du gyroscope symétrique pesant, c'est-à-dire d'un corps solide ayant un point fixe, l'ellipsoïde d'inertie relatif à ce point étant de révolution et le centre de gravité du corps étant sur l'axe de révolution. L'auteur introduit dans cette étude les courbes décrites dans le corps et dans l'espace par l'extrémité du moment cinétique par rapport au point de suspension, ainsi que les courbes décrites dans l'espace et dans le corps par l'extrémité de l'axe instantané de rotation. Il retrouve la célèbre proposition de Jacobi d'après laquelle le mouvement du corps considéré peut se ramener à la superposition de deux mouvements à la Poinsot, ainsi que les propositions établies dans la même voie par Halphen et par M. Darboux.

Somigliana (*C.*). — Sur le potentiel d'élasticité (129-140).

L'auteur se propose de montrer dans ce Mémoire que la détermination des diverses formes possibles pour le potentiel d'élasticité d'un corps peut être faite en faisant la seule hypothèse suivante : le potentiel est une forme quadratique par rapport aux six composantes de la déformation et cette forme quadratique doit demeurer invariante par un certain nombre de rotations ou de symétries d'ordre n. En cherchant tous les groupes de transformation de cette espèce qui conduisent à des formes distinctes du potentiel, on obtient exactement toutes les formes du potentiel, et celles-là seulement, qu'on obtiendrait en partant *a priori* des lois qui régissent la symétrie des cristaux, considérées comme lois d'expérience.

M. Somigliana commence par déterminer tous les invariants orthogonaux de déformation pour une rotation α autour d'un axe. Posant à cet effet

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad y_z = z_y = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z},$$
$$y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad z_x = x_z = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x},$$
$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad x_y = y_x = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y},$$

en désignant par u, v, w les composantes du déplacement dans la déformation du milieu et cherchant les formes quadratiques des variables x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y qui demeurent invariantes par une rotation autour de Oz et d'abord par une rotation *arbitraire*, il trouve ainsi la forme du potentiel d'élasticité pour les milieux qui admettent un axe d'isotropie; cette forme s'obtient en combinant linéairement les invariants quadratiques indépendants qui sont au nombre de 5 et elle contient par suite 5 constantes. En procédant de même avec les invariants quadratiques correspondant à une rotation $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ autour de Oz, il trouve que les seuls axes de symétrie pouvant conduire à des formes distinctes du potentiel s'obtiennent en donnant à n les valeurs 2, 3 ou 4. Toute symétrie d'ordre supérieur à 4 donne pour le potentiel la même forme que dans le cas d'un axe d'isotropie.

En considérant ensuite tous les groupes de rotations possibles, M. Somigliana

démontre que le potentiel d'élasticité quadratique ne peut avoir en tout que sept formes spéciales outre la forme générale (forme quadratique arbitraire des 6 variables contenant 21 constantes) et les deux formes correspondant à l'isotropie complète et à l'isotropie autour d'un axe.

Gebbia (*M.*). — Les déformations typiques des corps solides élastiques (141-230).

Les trois déformations dites *typiques* que M. Gebbia introduit dans la statique des corps élastiques conservatifs ont leur origine dans une analogie avec la théorie du potentiel newtonien et correspondent respectivement au potentiel newtonien de volume, au potentiel de simple couche et au potentiel de double couche.

L'auteur considère d'abord un milieu élastique indéfini et il envisage dans ce milieu les trois déformations typiques suivantes :

1° *Déformations du premier type.* — Ce sont celles produites dans le milieu par des forces distribuées d'une façon continue dans une portion S limitée et à trois dimensions prise dans le milieu. D'après la façon dont se comportent à l'infini les trois composantes u, v, w du déplacement d'un point quelconque et les composantes de la pression et d'après les équations vérifiées par les dérivées secondes de u, v, w dans S et sur la surface qui limite S, ces déformations du premier type sont les analogues du potentiel d'un corps à trois dimensions.

2° *Déformations du second type.* — Ce sont celles qui sont déterminées dans le milieu indéfini par l'action de forces distribuées d'une façon continue sur une surface σ limitée et fermée. En étudiant encore ici l'ordre infinitésimal à l'infini des composantes u, v, w du déplacement, en étudiant aussi les discontinuités subies par les composantes de la pression lorsqu'on traverse la surface σ et d'après la forme des équations aux dérivées partielles du second ordre vérifiées par u, v, w, on reconnaît l'analogie de ces déformations avec un potentiel de surface.

3° *Déformations du troisième type.* — Ce sont celles excitées dans le solide élastique indéfini en interposant ou en supprimant de la matière dans la portion de l'espace comprise entre deux feuillets infiniment voisins qui coïncident d'abord avec une surface fermée σ prise dans le milieu et qu'on écarte l'un de l'autre, puis en remplissant l'intervalle compris entre les deux feuillets par de la matière à l'état naturel. Cette façon nouvelle d'obtenir une déformation dans un milieu élastique est étudiée par l'auteur et l'étude des propriétés caractéristiques de cette déformation met en évidence l'analogie avec le potentiel de double couche.

Considérons maintenant un corps limité S et soit à étudier la déformation produite dans S par des forces (X, Y, Z) agissant sur la masse intérieure et par des forces (L, M, N) appliquées à la surface σ.

Le théorème essentiel établi par l'auteur est que cette déformation peut être considérée comme la résultante de trois déformations typiques du corps S_∞ obtenu en prolongeant indéfiniment S dans tous les sens : ces trois déformations sont une déformation du premier type due aux forces (X, Y, Z), une déformation du second type due aux forces (L, M, N) et une déformation du troisième type admettant pour surface singulière la surface σ.

Comme on le voit, l'auteur ne définit pas en général les déformations typiques par leurs expressions analytiques, mais seulement par l'ensemble de leurs propriétés caractéristiques. Les propriétés attribuées à chacun des trois types le déterminent d'ailleurs d'une façon univoque.

Dans une dernière Partie, l'auteur envisage le cas des corps isotropes indéfinis et il obtient dans ce cas l'expression analytique des diverses déformations typiques. Pour les déformations du second et pour celles du troisième type, il montre que si la surface σ est une surface ouverte, les expressions analytiques trouvées sont encore valables moyennant certaines hypothèses. Enfin, étant donné un corps isotrope limité, soit à étudier la déformation lorsqu'on donne les forces appliquées aux divers points de l'intérieur du corps et les déplacements à la surface : le théorème sur la décomposition de la déformation en trois déformations typiques permet d'obtenir les expressions des composantes u, v, w de la déformation et on les retrouve ainsi sous la forme obtenue par M. Somigliana (*Annali*, 2e série, t. X).

Lebesgue (*H.*). — Intégrale, longueur, aire (231-359) [en français].

C'est dans ce Mémoire que M. Lebesgue a donné la nouvelle définition de l'intégrale définie, plus générale que l'intégrale de Riemann, qui lui est due et qui est connue aujourd'hui sous le nom d'*intégrale de Lebesgue* : on sait combien cette définition s'est montrée féconde dans les recherches de ces dernières années relatives à la Théorie des fonctions. Le Mémoire de M. Lebesgue, qui est la Thèse de doctorat de l'auteur, a déjà été analysé à ce titre dans la première Partie du *Bulletin* (t. XXVII, 1903, p. 59). Nous renverrons donc le lecteur à cette analyse : l'intégrale de Lebesgue est d'ailleurs étudiée dès maintenant sous forme didactique dans certains cours d'Analyse (*voir* par exemple De la Vallée-Poussin, *Cours d'Analyse infinitésimale*, 3e édition, t. I, 1914; le Chapitre VII de cet Ouvrage est tout entier consacré à cette question).

S. Lattès.

COMPTES RENDUS hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, par MM. les Secrétaires perpétuels (1).

Tome 159, 2e semestre 1914.

Rémoundos (*J.-G.*). — Sur les séries de fonctions et les singularités des équations différentielles. (21-23).

A 3630, 4800.

Paschoud (*M.*). — Application de la méthode de Walther Ristz

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, ce Tome, 2e partie, p. 42-54.

au problème du régime uniforme dans un tube à section carrée. (158-160).

B 2400.

Boussinesq (*J.*). — Observations sur une Note de M. Paschoud. (160-161).

B 2400.

Boulad Bey (*F.*). — Un nouveau théorème sur les déplacements élastiques et son application à la simplification du calcul direct des réactions des appuis des poutres continues. (161-164).

B 3245.

Stoïlow (*S.*). — Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles à deux variables indépendantes. (231-234).

A 4840.

Tarnarider (Mlle *Th.*). — Sur la meilleure approximation de $x^k|x|$ par des polynomes de degré indéfiniment croissants. (294-296).

A 3210.

Garnier (*R.*). — Sur la représentation des intégrales des équations de M. Painlevé, au moyen de la théorie des équations linéaires. (296-299).

A 4860.

Spineanu (*C.*). — Sur le développement d'une fonction holomorphe en série d'inverses de polynomes et en série de fractions rationnelles. (299-301).

A 3630.

Boussinesq (*J.*). — Considérations théoriques sur la filtration des liquides par le sable, ou par d'autres milieux poreux analogues, et sur l'analogie des courants électriques avec ceux de filtration. (349-354).

B 2810.

Lecornu (*H.*). — Sur le laboratoire aérodynamique d'Auteuil. (354-356).

B 2840.

Boussinesq (*J.*). — Sur la théorie de la transpiration des gaz à travers les milieux poreux. (390-394).

B 2400.

Vallier (*E.*). — Balistique intérieure. Formules diverses, d'après l'Ouvrage récent de M. N. Zabouchki. (462-464).

B 1650.

Appell (*P.*). — Sur une transformation de certaines fonctions déduites des fonctions θ de degrés supérieurs. (464-466).

A 4070.

Fournier. — Résistance d'un fluide à la translation horizontale d'un corps fuselé, suivant son axe de figure. (484-486).

B 2440, 2500.

Boussinesq (*J.*). — Évaluation approximative de la constante μ de filtration, pour un milieu filtrant constitué par des grains sphériques d'un diamètre donné. (519-525).

B 2500.

Pompeiu (*D.*). — Un problème relatif aux ensembles abstraits. (527-530).

A 0430.

Boussinesq (*J.*). — Complément à une Note récente, sur le coefficient de filtration des sables à grains plus ou moins fins; calcul du coefficient sur des bases plus larges que dans cette Note, pour le sable hétérogène expérimenté par Darcy. (534-536).

B 2500.

Rabut (*Ch.*). — Nouveaux invariants projectifs. (556-558).

A 8010.

Darboux (*G.*). — Sur une proposition relative aux équations

linéaires du second ordre à deux variables indépendantes. (585-592).

A 4840.

Duhem (*P.*). — Sur le paradoxe hydrodynamique de Dalembert. (592-595).

B 2400.

Lebon (*E.*). — Sur une nouvelle Table de diviseurs des nombres. (597-599).

A 2810.

Darboux (*G.*). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes et sur les suites de Laplace formées avec de telles équations. (601-604).

A 4840.

Guéritot. — Sur une méthode expérimentale de détermination des courbes métacentriques de l'aéroplane. (629-631).

B 2860.

Picard (*E.*). — A propos du paradoxe hydrodynamique de Dalembert. (638).

B 2400.

Duhem (*P.*). — Remarque sur le paradoxe hydrodynamique de Dalembert. (638-640).

B 2400.

Mesnager (*A.*). — Méthode expéditive pour le calcul des voûtes. (650-652).

B 3280.

Globa-Mikhailenco (*B.*). — Figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation, infiniment voisine d'un cylindre elliptique. (646-649).

B 2410.

Rabut (*Ch.*). — Sur le pont d'Eauplat et la déformation des arcs pourvus de tympans (652-654).

B 3280.

Amans. — A propos du vol à voile. (654-657).

B 2840.

Haton de la Goupillière. — Sur une propriété des progressions arithmétiques. (705-711).

A 3220.

Rabut (*Ch.*). — Sur le pont de La Balme : Application du calcul des arcs pourvus de tympans. (715-717).

B 3280.

Darboux (*G.*) — Intégration d'une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. (721-728).

A 4840.

Haton de la Goupillière. — Sur une propriété des progressions arithmétiques. (761-765).

A 3220.

Duhem (*P.*). — Sur le paradoxe hydrodynamique de M. Brillouin. (790-792).

B 2400.

Villat (*H.*). — Sur le paradoxe de Dalembert et la théorie des mouvements discontinus. (801-803).

B 0820.

Appell (*P.*). — Le principe du minimum de l'énergie d'accélération et la substitution des liaisons aux forces. (989-992).

B 0820.

Buhl (*A.*). — Sur l'intervention des formules de Riemann, Stokes, Green dans les extensions du théorème d'Abel. (1000-1001).

A 3270.

Godeaux (*L.*). — Sur les surfaces de genre 1 triples, douées d'un nombre fini de points de diramation. (1002-1004).

A 8040.

C. Guichard.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK

Tome CXLIII, 1913 (*suite*) (1).

Dans cette équation, les valeurs $u(\bar{\xi}, \bar{\eta})$ de u sur la courbe C sont elles-mêmes données par l'équation intégrale

$$\begin{aligned} u(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = & \frac{1}{2\pi}\int_S \frac{\partial}{\partial n}\beta(\bar{\xi}, \bar{\eta}; t)\,\varphi(t)\,dt \\ & - \frac{1}{2\pi}\int_C \beta(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta)\,u(\xi, \eta)\,(\delta a\,d\eta - \delta b\,d\xi) \\ & - \frac{1}{2\pi}\int\int_T \beta(\bar{\xi}, \bar{\eta}; \xi, \eta)\,f(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \end{aligned}$$

Considérée comme dépendant de x_2, y_2, la fonction $\mathcal{G}(x_2, y_2; x_1, y_1)$ admet des dérivées partielles des deux premiers ordres continues pour tous les (x_1, y_1) dans T, et pour tous les (x_2, y_2) dans T_1 et T_2, sauf pour $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$. De plus elle satisfait à l'équation

$$M(\mathcal{G}(x_2, y_2; x_1, y_1)) = 0.$$

Lorsque le point (x_2, y_2) tend vers un point de S, (x_1, y_1) étant dans T, la fonction $\mathcal{G}(x_2, y_2; x_1, y_1)$ tend vers zéro.

Si enfin on désigne par (N_2) une des normales à C, par (n) une des normales à S, on a la relation

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial N_2\,\partial n} = \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial n\,\partial N_2},$$

la fonction $\mathcal{G}(X, Y; x, y)$ étant regardée comme dépendant de (x, y).

7. *Valeurs asymptotiques de la fonction de Green sur le contour du domaine.* — L'auteur suppose que, dans le domaine T formé par le cercle de centre O et de rayon 1, les coefficients de l'équation (1) sont continus ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre; il suppose, en outre, que l'équation $L(u) = 0$ n'admet aucune solution non identiquement nulle, régulière dans T et nulle sur S.

On peut prolonger la fonction de Green $\mathcal{G}(X, Y; x, y)$ au delà du cercle S en convenant de lui attribuer des valeurs égales et opposées en deux points conjugués par rapport à S. Dans ces conditions, l'auteur définit dans tout le plan, sauf sur S, trois fonctions a_0, b_0, c_0 par les conditions suivantes. On a, dans T :

$$a_0(x, y) = a(x, y), \qquad b_0(x, y) = b(x, y), \qquad c_0(x, y) = c(x, y);$$

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, ce Tome, 2e partie, p. 11-22.

en dehors de T :

$$a_0(x, y) = a(x_0, y_0)(y_0^2 - x_0^2) - 2b(x_0, y_0)x_0y_0,$$
$$b_0(x, y) = -2a(x_0, y_0)x_0y_0 + b(x_0, y_0)(x_0^2 - y_0^2),$$
$$c_0(x, y) = c(x_0, y_0)(x_0^2 + y_0^2)^2,$$

où (x_0, y_0) est le point conjugué de (x, y).

Alors, si (X_0, Y_0) est un point de T et (X_1, Y_1) son conjugué par rapport à S, la fonction de Green $\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y)$ satisfait en tous les points du plan, sauf sur S et aux points (X_0, Y_0) et (X_1, Y_1), à l'équation différentielle

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x} + b_0 \frac{\partial u}{\partial y} - c_0 u = 0.$$

Des hypothèses faites et des résultats du n° 1 résulte alors que

$$\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y)$$

est une solution de l'équation (5) régulière dans tout le plan, sauf en (X_0, Y_0) et (X_1, Y_1). Les dérivées partielles du premier ordre sont continues partout, sauf en ces deux points; ses dérivées partielles du second ordre admettent la ligne S comme ligne de discontinuité.

Lorsque les points (X_0, Y_0) et (x, y) sont à l'intérieur d'une couronne circulaire limitée par S et un cercle concentrique de rayon plus petit et suffisamment voisin de 1, on a une relation de la forme

$$\mathfrak{G}(X_0, Y_0; x, y) = \log \frac{\rho_1}{\rho} + \gamma_1(X_0, Y_0; x, y),$$

où l'on a posé

$$\rho^2 = (X_0 - x)^2 + (Y_0 - y)^2,$$
$$\rho_1^2 = (X_1 - x)^2 + (Y_1 - y)^2,$$

et où γ_1 est une fonction continue de (X_0, Y_0) et de (x, y) à l'intérieur et sur le contour de la couronne. Une représentation asymptotique existe pour les dérivées $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial y}$.

Ces résultats s'étendent facilement à un domaine T simplement connexe limité par une courbe quelconque à courbure continue.

Chapitre II. — *Le deuxième problème avec conditions aux limites.*

1. *Solutions régulières.* — Soit Θ un domaine fini dans le plan des (X, Y), limité par une courbe Σ fermée, continue, sans point double. Soit σ l'arc de Σ et supposons que les coordonnées d'un point de Σ soient des fonctions de σ admettant des dérivées continues des trois premiers ordres. Soit enfin l'équation

$$(1) \qquad \overline{L}(U) = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + A\frac{\partial U}{\partial X} + B\frac{\partial U}{\partial Y} + CU = F,$$

où les coefficients A, B, C, F sont continus dans Θ et sur Σ, les fonctions A et B admettant des dérivées des deux premiers ordres, C et F des dérivées du premier ordre continues dans Θ et sur Σ.

Le problème à résoudre est la recherche d'une solution $U(X, Y)$ de (1), bornée, régulière dans Θ, et dont la dérivée normale prend sur Σ des valeurs données $\gamma(\sigma)$ n'admettant qu'un nombre fini de points de discontinuité.

On peut, par une représentation conforme, se ramener au cas d'un domaine T se réduisant dans le plan des (x, y) au cercle de centre O et de rayon 1, l'équation (1) prenant alors la forme

$$(2) \qquad A(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu = f,$$

la dérivée normale de u devant prendre sur le contour S de T des valeurs données $g(s)$ n'admettant qu'un nombre fini de points de discontinuité.

Soit $w(x, y)$ la fonction, définie à une constante additive près, qui est régulière dans T, dont la dérivée normale prend sur S la valeur $g(s)$ et qui satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{1}{\pi}\int_S g(s)\,ds = \alpha.$$

Les dérivées $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ deviennent logarithmiquement infinies sur S.

Si l'on pose

$$u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y),$$

la nouvelle fonction inconnue doit avoir sa dérivée normale nulle sur S et satisfaire à l'équation

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0$$
$$= f(x, y) - a\frac{\partial w}{\partial x} - b\frac{\partial w}{\partial y} - cw - \alpha = \bar{f}(x, y).$$

L'auteur prolonge la fonction $u_0(x, y)$ en lui attribuant la même valeur en deux points conjugués par rapport au cercle S. Cette fonction ainsi prolongée satisfait dans tout le plan, sauf sur S, à une certaine équation

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + a_0\frac{\partial u_0}{\partial x} + b_0\frac{\partial u_0}{\partial y} + c_0 u_0 = f_0,$$

dont les coefficients admettent la ligne S comme ligne de discontinuité et ont à l'intérieur aussi bien qu'à l'extérieur du cercle unité, contour compris dans chaque cas, des dérivées du premier ordre continues. On peut appliquer à cette équation les résultats du premier Chapitre, n° 1.

On peut trouver des cercles concentriques à S en nombre suffisant, soient S_1, S_2, ..., S_p, tels que si l'on désigne par S' le cercle conjugué de S_1 par rapport à S, le premier problème avec conditions aux limites pour l'équation $A_0(u_0) = 0$ et l'équation adjointe $M_0(u_0) = 0$ admette une solution et une seule, dans chacun des domaines limités par

$$S' \text{ et } S_1,\quad S \text{ et } S_2,\quad S_1 \text{ et } S_3,\quad \ldots,\quad S_{p-2} \text{ et } S_p,\quad S_{p-1},$$

puis par

$$S \text{ et } S_1,\quad S_1 \text{ et } S_2,\quad S_2 \text{ et } S_3,\quad \ldots,\quad S_{p-1} \text{ et } S_p.$$

L'auteur suppose, pour simplifier, $p = 2$ et désigne par T_1, T_2, T_3 les domaines

limités par

$$S' \text{ et } S_1, \quad S \text{ et } S_2, \quad S_1.$$

Soient $\mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta)$, $\mathcal{G}_2(x, y; \xi, \eta)$, $\mathcal{G}_3(x, y; \xi, \eta)$ les fonctions de Green correspondantes de l'équation $M_0(u_0) = 0$.

D'après cela, la fonction $u_0(x, y)$ est donnée, suivant que le point (x, y) est dans le domaine T_1, T_2 ou T_3, par trois formules dont nous ne donnons que la première :

$$(4) \qquad \begin{aligned} u_0(x, y) = & \frac{R'}{2\pi}\int_{S'} \frac{\partial}{\partial n}\mathcal{G}_1(x, y; \theta)\, u_1(\theta)\, d\theta \\ & + \frac{R_1}{2\pi}\int_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\mathcal{G}_1(x, y; \theta)\, u_1(\theta)\, d\theta \\ & - \frac{1}{2\pi}\int\int_{T_1} \mathcal{G}_1(x, y; \xi, \eta)\, f_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ & - \frac{R}{2\pi}\int_{S} \mathcal{G}_1(x, y; \theta)\, u(\theta)\, (\delta a_0\, d\eta - \delta b_0\, d\xi), \end{aligned}$$

et où interviennent les valeurs $u(\theta)$, $u_1(\theta)$, $u_2(\theta)$ que prend $u_0(x, y)$ sur S, S_1 et S_2. Ces valeurs elles-mêmes sont données par un système d'équations intégrales dont nous ne reproduisons que la première :

$$(5) \qquad \begin{aligned} u(\tau) = & \frac{R'}{2\pi}\int_{S'} \frac{\partial}{\partial n}\mathcal{G}_1(\tau, \theta)\, u_1(\theta)\, d\theta \\ & + \frac{R_1}{2\pi}\int_{S_1} \frac{\partial}{\partial n}\mathcal{G}_1(\tau, \theta)\, u_1(\theta)\, d\theta \\ & - \frac{1}{2\pi}\int\int_{T_1} \mathcal{G}_1(\tau; \xi, \eta)\, f_0(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \\ & - \frac{R}{2\pi}\int_{S} \mathcal{G}_1(\tau, \theta)\, u(\theta)\, (\delta a_0\, d\eta - \delta b_0\, d\xi). \end{aligned}$$

Réciproquement, si les trois équations intégrales (5) admettent une solution unique, les formules (4) définissent une solution, régulière dans T, de l'équation (3), dont la dérivée normale s'annule sur S, et cette solution est unique. Si au contraire les équations intégrales homogènes correspondant à (5) admettent plusieurs solutions différentes de zéro, l'équation (3) admet le même nombre de solutions linéairement indépendantes, régulières dans T, et ayant leur dérivée normale nulle sur S.

Des considérations analogues s'appliqueraient au cas d'un domaine Θ multiplement connexe dont on ferait une représentation conforme sur un domaine T limité par des cercles.

2. *La fonction de Green correspondant au deuxième problème avec conditions aux limites.* — La fonction de Green $\mathcal{G}^{\text{II}}(x^*, y^*; x, y)$ dont la dérivée normale s'annule sur S se détermine sans difficulté. Lorsque les points (x^*, y^*) et (x, y) tendent vers deux points (σ^*) et (σ) de S, la fonction de Green est, à une fonction continue près de σ^* et de σ, égale à $2\log\frac{1}{\rho}$, où ρ désigne la distance des deux points (σ^*) et (σ).

Si l'on pose

$$\mathcal{G}^{\mathrm{II}}(x^*, y^*; x, y) = \mathrm{G}^{\mathrm{II}}(\mathrm{X}^*, \mathrm{Y}^*; \mathrm{X}, \mathrm{Y}),$$

on obtient la fonction de Green pour le domaine primitif Θ. Soit de même H^{II} la fonction de Green relative à l'équation $\overline{\mathrm{M}}(\mathrm{U}) = 0$ adjointe de $\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{U}) = 0$. On peut résoudre le second problème aux limites par la formule

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(\mathrm{X}^*, \mathrm{Y}^*) = &-\frac{1}{2\pi}\int\int_{\Theta} \mathrm{H}^{\mathrm{II}}(\mathrm{X}^*, \mathrm{Y}^*; \mathrm{X}, \mathrm{Y})\, \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} \mathrm{H}^{\mathrm{II}}(\mathrm{X}^*, \mathrm{Y}^*; \sigma)\, \gamma(\sigma)\, d\sigma\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} \mathrm{H}^{\mathrm{II}}(\mathrm{X}^*, \mathrm{Y}^*; \sigma)\, \mathrm{U}(\sigma)\, (\mathrm{A}\, d\mathrm{Y} - \mathrm{B}\, d\mathrm{X}),\end{aligned}$$

où les valeurs de U sur Σ sont données par l'équation intégrale

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(\sigma') = &-\frac{1}{2\pi}\int\int_{\Theta} \mathrm{H}^{\mathrm{II}}(\sigma'; \mathrm{X}, \mathrm{Y})\, \mathrm{F}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})\, d\mathrm{X}\, d\mathrm{Y}\\ &-\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} \mathrm{H}^{\mathrm{II}}(\sigma', \sigma)\, \gamma(\sigma)\, d\sigma\\ &+\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} \mathrm{H}^{\mathrm{II}}(\sigma', \sigma)\, \mathrm{U}(\sigma)\, (\mathrm{A}\, d\mathrm{Y} - \mathrm{B}\, d\mathrm{X}).\end{aligned}$$

Chapitre III.

1. *Le problème mixte.* — Par une transformation conforme, l'auteur se ramène encore à un domaine T limité par une circonférence S de centre O et de rayon 1. On considère sur cette circonférence une partie $\overline{\mathrm{S}}$ formée d'un nombre fini d'arcs de cercle et la partie restante $\underline{\mathrm{S}}$. Il s'agit alors de déterminer une solution $u(x, y)$ de l'équation $\mathrm{A}(u) = f$, qui soit bornée, régulière dans T, qui prenne sur $\underline{\mathrm{S}}$ une suite donnée de valeurs $\varphi(s)$ n'admettant qu'un nombre fini de points de discontinuité, et dont la dérivée normale prenne sur $\overline{\mathrm{S}}$ une autre suite donnée de valeurs $g(s)$ n'admettant qu'un nombre fini de points de discontinuité.

On peut déterminer une fonction $g_0(s)$ continue, sauf en un nombre fini de points, coïncidant sur $\overline{\mathrm{S}}$ avec $g(s)$, et telle que l'on ait

$$\int_0^{2\pi} g_0(s)\, ds = 0.$$

Soit alors $w(x, y)$ la fonction potentielle qui prend la valeur 1 à l'origine et dont la dérivée normale est égale à $g_0(s)$ sur S. En posant

$$u(x, y) = u_0(x, y) + w(x, y),$$

on voit que $u_0(x, y)$ est la solution, régulière dans T, de l'équation

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + a\frac{\partial u_0}{\partial x} + b\frac{\partial u_0}{\partial y} + cu_0 = f - a\frac{\partial w}{\partial x} - b\frac{\partial w}{\partial y} - cw = \bar{f}.$$

qui prend sur $\underline{S}$ la valeur $\varphi_1(s) = \varphi(s) - w(s)$ et dont la dérivée normale s'annule sur S, sauf peut-être aux points de discontinuité de $g_0(s)$.

L'auteur prolonge $u_0(x, y)$ au delà du cercle S comme il l'a fait dans le Chapitre II. La fonction ainsi prolongée satisfait à une équation $\Lambda_0(u_0) = f_0$. On peut alors effectuer une représentation conforme du plan (x, y) muni des coupures constituées par les arcs de cercle qui forment $\overline{S}$, sur un domaine Θ_* limité par un certain nombre de courbes analytiques fermées régulières Σ_*. Si alors on pose

$$u_0(x, y) = u_*(\xi, \eta),$$

la fonction $u_*(\xi, \eta)$ satisfait à une équation $\Lambda^*(u_*) = f_*$ dont les coefficients sont continus dans Θ_*, sauf sur un certain nombre de lignes de discontinuité Σ'. Le problème mixte proposé est ainsi ramené au problème résolu dans le Chapitre I.

Si l'on a résolu ce problème et si l'on pose

$$u^*(\xi, \eta) = u_0(x, y),$$

la fonction $u_0(x, y)$ ainsi obtenue prend les mêmes valeurs en deux points conjugués par rapport à S. Le problème mixte admet une solution unique si le problème relatif à Θ_* admet une solution unique. Si au contraire l'équation $\Lambda_*(u_*) = 0$ admet k solutions linéairement indépendantes, régulières en Θ_* et s'annulant sur Σ_*, l'équation $\Lambda(u) = 0$ admet k solutions linéairement indépendantes, régulières dans T, s'annulant sur $\underline{S}$ et admettant une dérivée normale nulle sur $\overline{S}$.

2. *La fonction de Green correspondant au problème mixte.* — L'auteur suppose que le premier problème avec conditions aux limites correspondant à l'équation $\Lambda^*(u_*) = 0$ admet une solution unique. Soit alors $\mathcal{G}_*$ la fonction de Green correspondante et soient (ξ', η'), (ξ'_1, η'_1) deux points images de deux points du plan des (x, y) conjugués par rapport à S. Si l'on pose alors

$$\Gamma(x', y'; x, y) = \mathcal{G}_*(\xi', \eta'; \xi, \eta) + \mathcal{G}_*(\xi'_1, \eta'_1; \xi, \eta),$$

on obtient la fonction de Green relative au problème mixte correspondant à l'équation $\Lambda(u) = 0$. A l'aide de la fonction de Green analogue $H(x', y'; x, y)$ correspondant à l'équation adjointe $M(u) = 0$, on peut déterminer la solution $u(x', y')$ du problème mixte par la formule

$$\begin{aligned} u(x', y') = &-\frac{1}{2\pi}\int\int_T H(x', y'; x, y) f(x, y)\, dx\, dy \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\underline{S}} \frac{d}{dn} H(x', y'; t)\, \varphi(t)\, dt \\ &- \frac{1}{2\pi}\int_{\overline{S}} H(x', y'; t)\, g(t)\, dt \\ &+ \frac{1}{2\pi}\int_{\overline{S}} H(x', y'; x, y)\, u(x, y)\, (a\, dy - b\, dx), \end{aligned}$$

où les valeurs $u(s_0)$ que prend $u(x, y)$ sur $\overline{S}$ sont données par une équation intégrale qu'il est inutile d'écrire.

Brandt (H.). — Sur la composition des formes quadratiques quaternaires (106-127).

La théorie, fondée par Gauss, de la composition des formes quadratiques binaires ne peut s'étendre, comme l'a montré Hurwitz, qu'aux formes quaternaires et à huit variables. Dans le cas des formes quaternaires, on n'a que des résultats particuliers, dus à Euler, Lagrange et surtout Hermite. L'auteur reprend la question en parlant de considérations algébriques. Il montre d'abord que, si une substitution bilinéaire transforme une forme A dans le produit BC de deux autres, il existe deux autres transformations bilinéaires dont l'une transforme B dans le produit AC et l'autre C dans le produit AB. Ces trois substitutions bilinéaires jouissent de propriétés symétriques. Après avoir examiné le cas des coefficients complexes, l'auteur passe d'abord aux coefficients réels, puis aux coefficients rationnels et entiers, ce qui le conduit à la théorie arithmétique de la composition des formes quaternaires.

1. *La transformation d'une forme quadratique quaternaire dans le produit de deux autres.* — Supposons que, par la transformation bilinéaire

$$x_i = \sum_{jk} m_{ijk} y_j z_k \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

on obtienne l'identité

$$A(xx) = B(yy)\, C(zz),$$

où l'on a posé

$$A(xx) = \sum_{ik} a_{ik} x_i x_k,$$

$$B(yy) = \sum_{ik} b_{ik} y_i y_k,$$

$$C(zz) = \sum_{ik} c_{ik} z_i z_k.$$

L'auteur suppose les déterminants des trois formes non nuls et égaux entre eux. Il considère alors trois matrices attachées à la substitution, les deux matrices *antistrophes*

$$s(y) = (s_{ik}(y)) \equiv \left(\sum_j m_{ijk} y_j\right),$$

$$t(z) \equiv (t_{ik}(z)) \equiv \left(\sum_l m_{ikl} z_l\right)$$

et la matrice *parastrophe*

$$\rho(x) \equiv (\rho_{ik}(x)) \equiv \left(\sum_i m_{jik} x_i\right).$$

On a d'abord

$$|s(y)| = \varepsilon_2 [B(yy)]^2, \qquad |t(z)| = \varepsilon_3 [C(zz)]^2 \qquad (\varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1).$$

Si l'on désigne ensuite par $\mathfrak{A}(xx)$ la *réciproque* de $A(xx)$, c'est-à-dire le quotient de l'adjointe de A par la racine carrée d du déterminant de A, et de

même pour $\mathfrak{B}(yy)$, $\mathfrak{C}(zz)$, la substitution bilinéaire

$$z_i = \sum_{jk} m_{kji} y_j x_k$$

conduit à l'identité

$$\mathfrak{C}(zz) = \mathrm{B}(yy)\,\mathfrak{A}(xx);$$

de même la substitution linéaire

$$y_i = \sum_{jk} m_{jik} x_j z_k$$

conduit à l'identité

$$\mathfrak{B}(yy) = \mathrm{C}(zz)\,\mathfrak{A}(xx);$$

on en déduit facilement la relation

$$|\rho(x)| = \varepsilon_1[\mathfrak{A}(xx)]^2 \qquad (\varepsilon_1 = \pm 1).$$

2. *Substitutions bilinéaires coordonnées.* — Il existe deux matrices $\mathsf{s}(y)$ et $\mathsf{t}(z)$ admettant pour éléments des formes linéaires en y_i et z_i et satisfaisant aux relations

$$\mathsf{s}(y)\,\mathsf{s}(y) = \mathrm{B}(yy)\mathsf{e}, \qquad \mathsf{t}(z)\,\mathsf{t}(z) = \mathrm{C}(zz)\mathsf{e},$$

où e désigne la matrice unité. La première est la deuxième antistrophe d'une substitution bilinéaire (o_{ijk}) transformant C en AB; la seconde est la première antistrophe d'une substitution bilinéaire (n_{ijk}) transformant B en CA. Si alors on appelle $\mathsf{r}(x)$ la première antistrophe de la substitution (O_{ijk}) et $\mathsf{r}(x)$ la seconde antistrophe de la substitution (n_{ijk}), on a la relation

$$\mathsf{r}(x)\,\mathsf{r}(x) = \mathrm{A}(xx)\mathsf{e}.$$

Les relations qui existent entre les six antistrophes $\mathsf{r}(x)$, $\mathsf{r}(x)$, $\mathsf{s}(y)$, $\mathsf{s}(y)$, $\mathsf{t}(z)$, $\mathsf{t}(z)$ des trois substitutions bilinéaires (m_{ijk}), (n_{ijk}), (o_{ijk}) se conservent par des substitutions linéaires arbitraires effectuées sur les variables x_i, y_i, z_i. Ces trois substitutions bilinéaires sont dites *coordonnées*.

3. *Les signes des déterminants des formes linéaires.* — En désignant par $\sigma(y)$, $\tau(z)$ les matrices parastrophes des deux substitutions (n_{ijk}) et (o_{ijk}), on a les relations suivantes :

$$|\rho(x)| = \varepsilon_1[\mathfrak{A}(xx)]^2, \qquad |\mathsf{s}(y)| = \varepsilon_2[\mathrm{B}(yy)]^2, \qquad |\mathsf{t}(z)| = \varepsilon_3[\mathrm{C}(zz)]^2,$$
$$|\sigma(y)| = \varepsilon_2[\mathfrak{B}(yy)]^2, \qquad |\mathsf{t}(z)| = \varepsilon_3[\mathrm{C}(zz)]^2, \qquad |\mathsf{r}(x)| = \varepsilon_1[\mathrm{A}(xx)]^2,$$
$$|\tau(z)| = \varepsilon_3[\mathfrak{C}(zz)]^2, \qquad |\mathsf{r}(x)| = \varepsilon_1[\mathrm{A}(xx)]^2, \qquad |\mathsf{s}(y)| = \varepsilon_2[\mathrm{B}(yy)]^2.$$

De plus, le produit $\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$ est égal à -1.

La transformation bilinéaire (m_{ijk}) est dite *positive*, *négative* ou *indéterminée* si ses déterminants antistrophes sont tous les deux positifs, tous les deux négatifs, ou l'un positif et l'autre négatif.

4. *Transformations réelles et rationnelles.* — Si les x_i et les ξ_i sont deux

séries quelconques de variables liées par la relation

$$\sum x_i \xi_i = 0,$$

on a

$$|\varphi(\xi)|\,|\mathrm{r}(x) = [\mathcal{A}(\xi\xi)\,\mathrm{A}(xx)]^2.$$

Il résulte de là que, si les coefficients des formes A, B, C et de la substitution (m_{ik}) sont réels (ou rationnels), $\mathrm{A}(xx)\,\mathcal{A}(\xi\xi)$ est aussi à coefficients réels (ou rationnels); autrement dit, *la réciproque de* $\mathrm{A}(xx)$ *est à coefficients réels (ou rationnels)*.

S'il s'agit simplement de formes à coefficients réels, il faut donc, pour qu'une forme puisse être transformée en un produit de deux autres, que son déterminant soit positif, c'est-à-dire que la forme soit définie ou bien que son indice d'inertie soit 2. On sait d'ailleurs que ces conditions sont suffisantes.

5. *Une identité pour les formes quaternaires.* — Si au contraire il s'agit de formes et de transformations à coefficients réels, il faut que le déterminant soit un carré parfait. L'auteur démontre la réciproque en s'appuyant sur une identité déjà utilisée par Hermite.

Soit

$$\mathrm{A}(xx) = \sum_{i,k} a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3)$$

une forme quadratique de déterminant D, le coefficient a_{00} n'étant pas nul. En posant

$$\mathrm{A}_{0x} = a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + a_{03}x_3,$$

on a une identité de la forme

$$a_{00}\,\mathrm{A}(xx) = \mathrm{A}_{0x}^2 + f(xx),$$

où f ne dépend que de x_1, x_2, x_3. Soit $a_{00}\sqrt{\mathrm{D}}.\varphi$ l'adjointe de f et posons

$$s_1 = x_2y_3 - x_3y_2, \qquad s_2 = x_3y_1 - x_1y_3, \qquad s_3 = x_1y_2 - x_2y_1,$$

$$\varphi_1(s) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi(ss)}{\partial s_1}, \qquad \varphi_2(s) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi(ss)}{\partial s_2}, \qquad \varphi_3(s) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial\varphi(ss)}{\partial s_3}.$$

Dans ces conditions, on a l'identité

$$\mathrm{A}(xx)\,\mathrm{A}(yy) = z_0^2 + f(zz),$$

grâce à la substitution bilinéaire

$$z_0 = \mathrm{A}(xy), \qquad z_i = \frac{1}{a_{00}}\,[\mathrm{A}_{0x}y_i - \mathrm{A}_{0y}x_i + \varphi_i(s)] \qquad (i = 1, 2, 3).$$

6. *Notion de la composition. Formes principales et classes principales.* — Une forme à coefficients entiers primitive est dite résulter de la *composition* de deux autres formes primitives à coefficients entiers, s'il existe une substitution bilinéaire *positive* à coefficients entiers transformant la première dans le produit des deux autres. Pour qu'il en soit ainsi, *il faut que le déterminant* D

de la forme soit un carré parfait et que les coefficients de son adjointe soient des entiers divisibles par $\sqrt{D}$.

L'auteur démontre que cette condition est suffisante, d'abord dans le cas où la forme représente le nombre *un*. Elle peut alors se reproduire par composition avec elle-même. Une telle forme est dite *forme principale* et la classe à laquelle elle appartient *classe principale*. A un déterminant $D = d^2$ correspondent en général plusieurs classes principales, ce qui n'a pas lieu dans le cas, étudié par Gauss, des formes binaires.

7. *La composition de deux formes primitives opposées en une forme principale.* — L'auteur démontre ensuite, dans le cas général, que la condition énoncée plus haut est suffisante. Sa démonstration le conduit à la notion de *formes opposées* qui se déduisent l'une de l'autre par une substitution unimodulaire de déterminant -1: elle montre, en outre, que la composition de deux formes opposées donne naissance à une forme principale.

Steinitz (*Ernst*). — Séries non absolument convergentes et systèmes convexes (128-175).

On sait, d'après les travaux de Cauchy, Dirichlet et Riemann, que si une série à termes réels est absolument convergente, on peut changer d'une manière quelconque l'ordre de ses termes sans changer sa somme et que, dans le cas contraire, on peut toujours ranger ses termes dans un ordre tel qu'elle devienne convergente et ait pour somme un nombre arbitrairement donné. Autrement dit, le *domaine des sommes* d'une série non absolument convergente est formé de l'ensemble des nombres réels.

Si la série est à termes complexes ordinaires et non absolument convergente, il peut arriver que le domaine des sommes soit formé de tous les points d'une droite ou de tous les points du plan. L'auteur se propose de montrer qu'il en est toujours ainsi, plus généralement qu'étant donnée une série dont les termes sont des nombres complexes à n unités, le domaine des sommes de cette série est, dans l'espace à n dimensions, une multiplicité linéaire : cette multiplicité se réduit à un point si la série est absolument convergente. P. Lévy avait déjà donné une démonstration de ce théorème (*Nouvelles Annales*, 4e série, t. LXIV, 1905). Celle que donne l'auteur est plus précise et s'appuie sur une théorie géométrique, celle des systèmes *convexes*.

I. *Multiplicités linéaires.* — Après avoir défini un nombre complexe

$$\gamma = c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + \ldots + c_n\varepsilon_n,$$

avec n unités $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ et n coordonnées réelles $c_1, c_2, \ldots, c_n$, l'addition de deux nombres complexes, la multiplication par un nombre réel, l'auteur définit ce qu'il appelle un *module*. C'est un système M de nombres complexes satisfaisant aux conditions de contenir, en même temps qu'un nombre complexe α, tous les nombres complexes $c\alpha$, c étant réel, et en outre de contenir, en même temps que deux nombres complexes α et β, leur somme $\alpha + \beta$.

Si l'on fait correspondre au nombre complexe γ, dans un espace à n dimensions rapporté à n axes de coordonnées rectangulaires, le point $(c_1, \ldots, c_n)$, un module est représenté par une multiplicité linéaire passant par l'origine.

L'auteur définit ensuite les transformations linéaires et les multiplicités

linéaires, ainsi que la dimension d'une multiplicité linéaire. Il appelle produit $\alpha\beta$ de deux nombres complexes le nombre réel

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n;$$

c'est le produit interne de Grassmann; on a

$$|\alpha\beta| \leqq |\alpha|\,|\beta|.$$

A chaque module M de dimension r correspond un autre module N de dimension $n - r$, dit *complémentaire* du premier, et formé des nombres complexes qui, multipliés par un nombre complexe quelconque de M, donnent un produit nul. Géométriquement, N est le lieu des droites issues de l'origine et rectangulaires sur M.

II. *Limites.* — Tout *plan* (multiplicité linéaire à $n - 1$ dimensions) A peut être regardé comme le lieu de points ξ qui satisfont à une équation de la forme

$$\alpha\xi = c,$$

où c est un nombre réel fixe et où α est un nombre complexe fixe de module égal à *un* et qui définit la direction de l'une des normales au plan. D'après cela, on dit qu'un ensemble de points Z est limité par le plan A dans la direction α si c est une limite supérieure pour l'ensemble des nombres réels αZ. Si l'ensemble αZ est borné supérieurement, on dit que Z est *borné* dans la direction α; si g est la borne supérieure de l'ensemble αZ, on dit que le plan $\alpha\xi = g$ est le *plan d'appui* de Z dans la direction α.

Un ensemble Z est dit à *extension symétrique* si, pour tout couple de directions opposées α et $-\alpha$, cet ensemble ou bien est borné dans chacune des deux directions, ou bien n'est borné dans aucune. S'il en est ainsi, l'ensemble des nombres complexes γ pour lesquels γZ est borné forme un module M. Si Z n'est borné dans aucune direction, c'est-à-dire *totalement non borné*, le module M se réduit à zéro. Si la dimension de M est r, Z sera dit un *ensemble* à extension symétrique de classe $n - r$.

L'auteur définit ensuite un ensemble *fermé* comme un ensemble qui contient tous ses points limites (situés à distance finie). L'ensemble dérivé de Z est fermé.

Une suite de nombre complexes

$$\gamma_0, \quad \gamma_1, \quad \ldots, \quad \gamma_p, \quad \ldots$$

est convergente s'il en est ainsi de chaque suite réelle $\gamma_p\xi$, et réciproquement. En général, il n'en est pas ainsi : les points ξ pour lesquels la suite $\gamma_p\xi$ est convergente forment un module M ; si le rang de ce module est r, il existe une multiplicité linéaire A à $n - r$ dimensions telle que, pour tout nombre γ de A et pour tout nombre ξ de M, on ait la relation

$$\lim_{p=\infty} \gamma_p\xi = \gamma\xi.$$

Pour qu'une série

$$\gamma_0 + \gamma_1 + \ldots$$

converge quel que soit l'ordre des termes, il faut et il suffit que les n séries

des coordonnées convergent absolument, autrement dit que la série

$$|\gamma_0| + |\gamma_1| + \ldots$$

soit convergente : on dit alors que la série est absolument convergente, et la somme est indépendante de l'ordre des termes.

III. *Ensembles convexes.* — Un ensemble de points Z est dit *convexe* s'il jouit de la propriété de contenir, en même temps que deux points α et β, tous les points situés entre α et β.

A tout ensemble Z on peut faire correspondre un plus petit ensemble $\overline{Z}$ contenant tous les points de Z.

L'ensemble dérivé Z' d'un ensemble convexe Z est encore convexe ; l'ensemble dérivé $\overline{Z}'$ du plus petit ensemble convexe contenant Z est le plus petit ensemble convexe fermé contenant Z.

Les multiplicités linéaires sont des ensembles convexes fermés.

Un ensemble convexe Z est dit à r dimensions si la plus petite multiplicité linéaire contenant Z est à r dimensions.

Si Z est un ensemble convexe fermé, γ un point n'appartenant pas à Z, il existe un demi-espace contenant Z sans contenir γ.

Si Z est totalement non borné, $\overline{Z}'$ contient tous les points de l'espace ; dans le cas contraire, $\overline{Z}'$ est formé des points communs à tous les demi-espaces qui contiennent Z. On peut encore dire que $\overline{Z}'$ est le plus grand ensemble qui admet les mêmes plans d'appui (orientés) que Z.

IV. *Séries convergentes.* — Étant donné un ensemble dénombrable de nombres complexes Γ, l'auteur désigne par Γ_* l'ensemble des sommes obtenues en ajoutant un nombre fini d'éléments de Γ ; l'auteur fait rentrer o dans Λ_*. L'ensemble Γ est dit *sommable* si l'une au moins des séries dont les termes sont tous les éléments de Γ est convergente. L'ensemble sommable Γ est dit *inconditionnellement* sommable si toutes les séries formées avec les éléments de Γ sont convergentes, *conditionnellement* sommable dans le cas contraire. Le *domaine des sommes* d'un ensemble sommable Γ est l'ensemble de toutes les sommes des séries convergentes formées avec les éléments de Γ.

Pour qu'un ensemble dénombrable C de nombres réels soit inconditionnellement sommable, il faut et il suffit que l'ensemble C_* soit absolument borné : dans ce cas, l'ensemble des sommes se réduit à un seul nombre, qui est la somme de la borne supérieure et de la borne inférieure de C_*.

Pour qu'un système Γ de nombres complexes soit inconditionnellement sommable, il faut et il suffit également que le système Γ_* des sommes partielles soit absolument borné. Dans ce cas, le domaine des sommes se compose d'un seul nombre σ, et le point σ est le centre unique du plus petit ensemble convexe et fermé $2\overline{\Gamma}'_*$ contenant $2\Gamma_*$.

Le théorème plus général qui résume toute la théorie est le suivant :

Pour que le système dénombrable Γ soit sommable, il faut et il suffit que l'ensemble Γ admette la limite unique o et que le système Γ_* des sommes partielles soit à extension symétrique. S'il en est ainsi, et si r est la classe de Λ_*, l'ensemble $2\overline{\Gamma}'_*$ possède des centres qui forment une multiplicité linéaire à r dimensions. Cette multiplicité représente le domaine des sommes de Γ.

Les conditions indiquées sont évidemment nécessaires. Le théorème est vrai pour $r = 0$, cas où Γ_* est absolument borné. Le cas général se ramène assez facilement au cas de $r = n$. Tout revient donc en somme à démontrer que, *si* Γ *a pour unique limite* 0 *et si* Γ_* *est totalement non borné, tout nombre complexe peut être regardé comme somme d'une série formée de tous les éléments de* Γ.

L'auteur range pour cela les nombres de Γ dans un ordre déterminé

$$\gamma_0, \quad \gamma_1, \quad \ldots, \quad \gamma_p, \quad \ldots;$$

il désigne par g_k la borne supérieure de l'ensemble

$$|\gamma_k|, \quad |\gamma_{k+1}|, \quad \ldots;$$

on a par hypothèse

$$\lim_{k=\infty} g_k = 0.$$

Cela posé, soit σ un nombre arbitrairement donné; il résulte d'un lemme précédemment démontré qu'on peut trouver une somme partielle π_0 contenant γ_0 et satisfaisant à

$$|\pi_0 - \sigma| \leqq n g_0;$$

on peut ensuite trouver une somme partielle π_1 formée des éléments de Γ qui n'entrent pas dans π_0, contenant le premier de ces éléments et satisfaisant à

$$|\pi_0 + \pi_1 - \sigma| \leqq n g_1,$$

et ainsi de suite. La série

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \ldots$$

est évidemment convergente et a pour somme σ. Il résulte en outre d'un autre lemme, démontré précédemment, qu'on peut ranger les éléments de Γ qui entrent dans π_k dans un ordre

$$\gamma_{k1}, \quad \gamma_{k2}, \quad \ldots, \quad \gamma_{kp_k},$$

tel que l'on ait

$$|\gamma_{k1} + \gamma_{k2} + \ldots + \gamma_{kl}| \leqq 4 n g_{k-1} \qquad (l = 1, 2, \ldots, p_k).$$

Il résulte de là qu'en explicitant chaque somme partielle π_k dans l'ordre indiqué, on obtient une série formée des éléments de Γ et qui a pour somme le nombre donné σ. Le théorème est donc démontré.

(*A suivre.*)

Weyl (H.). — Sur le problème des valeurs aux limites dans la théorie des radiations et sur les lois asymptotiques du spectre (177-202).

1. Dans une Note parue dans le même journal (t. CXLI, p. 163; voir *Bulletin*, 2e série, t. XXXVII, 1913, p. 169). l'auteur s'est occupé de l'intégration de l'équation

$$\Delta \mathfrak{U} + \lambda \mathfrak{U} = 0 \qquad (\lambda = \text{const.})$$

dans un domaine J de l'espace, $\mathfrak{U}$ désignant un champ de vecteurs inconnu

satisfaisant sur les parois $\mathcal{O}$ de J à l'un des deux systèmes de conditions

$$(1) \qquad \mathfrak{U} \text{ normal}, \ \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} \text{ tangentiel};$$

$$(2) \qquad \mathfrak{U} \text{ tangentiel}, \ \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial n} \text{ normal}.$$

Il a comparé ces deux problèmes, d'une part avec le problème de la membrane à trois dimensions

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ dans J}; \qquad u = 0 \text{ sur les parois},$$

d'autre part, avec le problème acoustique

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ dans J}; \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur les parois}.$$

et a démontré les deux théorèmes suivants :

Théorème I. — *Le problème* (1) *admet, au-dessous d'une limite donnée, au moins trois fois autant de nombres fondamentaux* λ *que le problème de la membrane à trois dimensions.*

Théorème II. — *Le problème* (2) *admet, au-dessous d'une limite donnée, au plus trois fois autant de nombres fondamentaux* λ *que le problème acoustique.*

Ces résultats mathématiques sont à l'abri de toute objection. Mais l'auteur avait cru à tort que les problèmes (1) et (2) étaient identiques aux problèmes qui se posent dans l'étude des radiations à l'intérieur d'une cavité. Suivant une remarque de M. Levi-Civita, il n'en est rien. Le problème

$$(1_*) \qquad \Delta \mathfrak{E} + \lambda \mathfrak{E} = 0, \text{ dans J}; \qquad \mathfrak{E} \text{ normal}, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \text{ sur les parois},$$

où le vecteur $\mathfrak{E}$ désigne l'intensité du champ électrique, comporte des conditions aux limites qui ne sont pas, comme l'auteur l'avait cru, équivalentes aux conditions (1).

L'auteur reprend le problème (1_*) et, sans avoir besoin de le comparer au problème acoustique, il retrouve essentiellement les mêmes résultats. En particulier, *le problème* (1_*) *admet une infinité dénombrable de nombres fondamentaux* σ_i *qui sont tous positifs à l'exception de* h *d'entre eux qui sont nuls, si l'on suppose la cavité* J *limitée par* $h+1$ *surfaces séparées. De plus il y a, au-dessous d'une limite donnée, au moins trois fois autant de nombres* σ_n *que de nombres fondamentaux pour le problème de la membrane. Enfin, on a la loi asymptotique*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\sigma_n}{n^2} = \left(\frac{2\pi^2}{J}\right)^2.$$

Des résultats analogues peuvent s'établir pour le problème relatif au champ magnétique

$$(2_*) \qquad \Delta \mathfrak{M} + \lambda \mathfrak{M} = 0; \qquad \mathfrak{M} \text{ tangentiel}, \ \operatorname{curl} \mathfrak{M} \text{ normal, sur les parois.}$$

L'auteur démontre que, si le domaine J est convexe, le problème (2_*) admet,

au-dessous d'une limite déterminée, au plus trois fois autant de nombres fondamentaux que le problème acoustique.

Pour traiter le problème (1_*), l'auteur s'appuie sur une identité qui présente une certaine analogie avec une des formules de Green et qu'on peut écrire

$$\int_J (\operatorname{curl} \mathfrak{u} \operatorname{curl} \mathfrak{v} + \operatorname{div} \mathfrak{u} \operatorname{div} \mathfrak{v} + \mathfrak{u}\, \Delta \mathfrak{v})\, dp = -\int_{\Theta} ([\mathfrak{n}, \mathfrak{u}] \operatorname{curl} \mathfrak{v} + u_n \operatorname{div} \mathfrak{v})\, do,$$

où dp désigne l'élément de volume de J et do l'élément de surface de Θ. Il est fait usage des notations vectorielles, le produit géométrique (intérieur) de deux vecteurs $\mathfrak{u}$ et $\mathfrak{v}$ est désigné par $\mathfrak{u}.\mathfrak{v}$, le produit extérieur par $[\mathfrak{u}, \mathfrak{v}]$, le tourbillon du champ de vecteurs $\mathfrak{u}$ par curl $\mathfrak{u}$, la projection normale de $\mathfrak{u}$ par u_n; enfin on a posé

$$\operatorname{div} \mathfrak{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}.$$

Dans le cas du problème (1_*), les conditions aux limites peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\mathfrak{E} \text{ normal}, \quad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial n} - K\mathfrak{E} \text{ tangentiel},$$

en désignant par K le double de la courbure moyenne de la surface Θ.

2. L'auteur passe à la démonstration des théorèmes annoncés. La détermination du signe des nombres fondamentaux du problème (1_*) repose sur la relation

$$\int_J [(\operatorname{curl} \mathfrak{E})^2 + (\operatorname{div} \mathfrak{E})^2 - \lambda \mathfrak{E}^2]\, dp = 0;$$

les nombres λ sont positifs à moins que J ne soit limité par plusieurs surfaces, auquel cas un certain nombre des λ pourrait être nul.

Le problème (1_*) se ramène à une équation intégrale dont le noyau est un certain *tenseur de Green*

$$\Gamma = \Gamma(p, p') = \begin{Vmatrix} G_{xx} & G_{xy} & G_{xz} \\ G_{yx} & G_{yy} & G_{yz} \\ G_{zx} & G_{zy} & G_{zz} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} G & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{Vmatrix} + A,$$

où G est la fonction de Green relative au problème de la membrane et A une certaine matrice dont chaque colonne peut être déterminée comme solution d'un problème analogue à (1_*), mais où la divergence du vecteur inconnu, au lieu d'être nulle sur les parois, est égale à une fonction connue. Le noyau Γ est symétrique. La connaissance du tenseur Γ permet de résoudre le problème non homogène

$$\Delta \mathfrak{E} = -4\pi \mathfrak{F}$$

par la formule

$$\mathfrak{E}(p) = \int_J \Gamma(p, p')\, \mathfrak{F}(p')\, dp'.$$

L'application du théorème de Hilbert au noyau symétrique Γ est possible, grâce à des inégalités qui expriment que chacun des éléments des matrices

$A(p, p')$ et $\Gamma(p, p')$ est inférieur en valeur absolue au rapport d'un facteur constant à la distance des points p, p'. Les nombres fondamentaux σ_i forment donc une suite discrète.

Le théorème d'après lequel il y a, au-dessous d'une limite donnée, au moins trois fois autant de nombres fondamentaux pour le problème (1_*) que pour le problème de la membrane est une conséquence du théorème d'après lequel les nombres fondamentaux α du noyau A sont tous positifs. Or, l'égalité

$$u(p) = \alpha \int_J A(p, p')\, u(p')\, dp'$$

entraîne la suivante :

$$\int_J [(\operatorname{curl} u)^2 + (\operatorname{div} u)^2]\, dp = 4\pi\alpha \int_J u^2\, dp.$$

3. L'auteur complète les résultats précédents dans le cas où le domaine J est limité par plusieurs surfaces.

Le développement du noyau $A(p, p')$ suivant les fonctions fondamentales normales lui permet alors de démontrer facilement une inégalité de la forme

$$\alpha_n \geqq \frac{1}{C} \frac{n}{\log n};$$

cette inégalité prouve que $\frac{1}{\alpha_n}$ décroît infiniment plus vite que $n^{-\frac{2}{3}}$ et par suite que l'addition de A au tenseur Γ_0 ne change pas la loi asymptotique des nombres fondamentaux; les résultats obtenus dans la Note précédente de l'auteur sont ainsi justifiés.

4. L'auteur démontre par continuité que, si l'on passe des conditions aux limites du problème (2) à celles du problème (2_*), la quantité des nombres fondamentaux inférieurs à une limite donnée ne cesse pas d'être au moins égale à celle des nombres fondamentaux du problème acoustique. Mais la démonstration suppose le volume J convexe.

5. L'auteur démontre que, si l'on désigne par $\varkappa_n$ le $n^{\text{ième}}$ nombre fondamental du problème de la membrane, on a pour $\varkappa_n$ la valeur asymptotique

$$\varkappa_n \sim \left(\frac{6\pi^2 n}{J}\right)^{\frac{2}{3}},$$

et que l'erreur relative commise est de l'ordre de $\frac{\log n}{\sqrt[3]{n}}$.

Dans le problème acoustique et le problème des radiations, la méthode actuelle de l'auteur donne des résultats un peu moins précis; elle conduit pour limite supérieure de l'erreur relative à une expression de l'ordre de $\sqrt{\frac{\log n}{\sqrt[3]{n}}}$.

6. Les résultats précédents s'étendent à l'équation différentielle, identique à son adjointe,

$$\Delta u - qu + \lambda k u = 0,$$

où $k\,(>0)$ et q sont des fonctions données continues dans J.

D'abord, si l'on prend pour q deux fonctions différentes q' et q'', la différence $\lambda'_n - \lambda''_n$ entre les $n^{\text{ièmes}}$ membres fondamentaux correspondants reste constamment comprise entre deux limites fixes, le minimum et le maximum de $\frac{q' - q''}{k}$.

Si alors on prend $q = 0$, et si l'on désigne par $n^{(k)}(L)$ le nombre des nombres fondamentaux inférieurs à L, on a la loi asymptotique

$$n^{(k)}(L) \sim \frac{1}{6\pi^2} L^{\frac{3}{2}} \int_1 (k(p))^{\frac{3}{2}} dp.$$

Bohr (*Harald*). — Sur la convergence uniforme des séries de Dirichlet (203-211).

Soit

$$0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots \qquad \left(\lim_{n=\infty} \lambda_n = \infty\right)$$

une suite de nombres réels et soit

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

une série de Dirichlet possédant un domaine de convergence. Il existe quatre droites importantes, d'abscisses A, B, C, D, associées à cette série.

La droite $\sigma = A$ est caractérisée par cette propriété que la série est convergente quand la partie réelle σ de s est supérieure à A, divergente quand σ est inférieur à A. De même, la série est *absolument* convergente pour $\sigma > B$, non absolument convergente pour $\sigma < B$. La série est *uniformément* convergente dans le demi-plan $\sigma > C + \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε, et non uniformément convergente dans le demi-plan $\sigma > C - \varepsilon$. Enfin, si $f(s)$ est la somme de la série, la fonction $f(s)$ est régulière et bornée pour $\sigma > D + \varepsilon$, mais pas pour $\sigma > D - \varepsilon$.

On a évidemment

$$A \leqq C \leqq B.$$

1. L'auteur suppose d'abord que la suite des λ_i satisfasse à la condition qu'il existe un nombre fini $l \geqq 0$ tel que, pour chaque valeur positive de δ, on ait

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n(l+\delta)}).$$

S'il en est ainsi, et si la série de Dirichlet possède un domaine de convergence, on a

$$C = D.$$

2. L'auteur suppose ensuite que la série des λ_i satisfasse à la condition

$$\lim_{n=\infty} \frac{\log n}{\lambda_n} = 0.$$

Cette condition est équivalente à la suivante : la largeur de la bande de convergence non absolue est nulle, c'est-à-dire $A = B = C$.

S'il en est ainsi, la valeur commune de A, B et C est égale à D. On généralise ainsi une propriété bien connue de la série de puissances qui correspond au cas particulier de $\lambda_n = n$.

Horn (*J.*). — Sur la manière dont les intégrales d'une équation différentielle linéaire du premier ordre se comportent au voisinage d'un point d'indétermination (212-240).

Dans deux articles précédents (même journal, t. CXX et CXXII), l'auteur avait considéré l'équation différentielle

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx} + g(x)y = h(x),$$

où k est un entier positif, $g(x)$ un polynome entier de degré k,

$$g(x) = 1 + a_1 x + \ldots + a_k x^k,$$

et $h(x)$ une série entière convergente. Cette équation est vérifiée formellement par une série entière, en général divergente,

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Il existe alors k intégrales η_m de l'équation différentielle dont chacune est représentée asymptotiquement par la série précédente au voisinage de l'origine, *mais à l'intérieur d'un secteur*

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2} - \delta}{k} \qquad (m = 0, 1, \ldots, k-1),$$

δ désignant un nombre positif aussi petit qu'on veut.

L'auteur se propose de compléter ces résultats en s'inspirant de recherches récentes de Watson sur les séries asymptotiques (*Philosophical Transactions*, 1911).

1. L'auteur démontre d'abord que les coefficients de la série S satisfont à la condition

$$|c_n| \leqq A(n!)^{\frac{1}{k}}(1+\varepsilon)^n,$$

où A et ε sont des nombres positifs indépendants de n, ε étant aussi petit qu'on veut.

On peut alors poser

$$\eta_m = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \gamma_n^{(m)} x^{n+1} \qquad (m = 0, 1, \ldots, k-1);$$

ce qui est intéressant c'est de trouver une limite supérieure du coefficient $\gamma_n^{(m)}$.

Désignons pour cela par r un nombre inférieur au rayon de convergence de la série entière $h(x)$, par δ un angle compris entre o et $\frac{3\pi}{2}$, par δ' un angle positif inférieur à la fois à δ et à π. Si, dans ces conditions, x satisfait aux inégalités

$$|x| \leqq r\sqrt[k]{\sin\delta'},$$

$$\frac{2m\pi - \frac{3\pi}{2} - \delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{2m\pi + \frac{3\pi}{2} - \delta}{k},$$

on a

$$|\gamma_n^{(m)}| \leqq B(n!)^{\frac{1}{k}}\left(\frac{1+\varepsilon}{\sqrt[k]{\sin\delta'}}\right)^n,$$

où B et ε sont des nombres positifs indépendants de n, le nombre ε étant aussi petit qu'on veut.

Dans le cas particulier $k = 1$, on peut mettre les résultats précédents sous une autre forme. On a, sous les mêmes hypothèses,

$$|c_n| \leqq \mathfrak{A}(|a|+1)\ldots(|a|+n-1),$$
$$|\gamma_n| \leqq \mathfrak{B}(|a|+1)\ldots(|a|+n)(\sin\delta')^{-n},$$

où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont indépendants de n, et où a est le coefficient de x dans $g(x)$.

2. L'auteur suppose dans ce paragraphe $k = 1$. L'intégrale τ_1 dont il est question plus haut peut se déduire facilement de la fonction

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n t^n}{n!}$$

associée par Borel à la série S. La théorie de Watson montre en effet qu'on a, dans un certain domaine du plan de la variable x,

$$\tau_1 = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} v\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt.$$

L'auteur démontre directement cette formule. La fonction v satisfait à l'équation différentielle

$$(t+1)\frac{dv}{dt} + av = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n t^{n-1}}{(n-1)!};$$

elle n'admet à distance finie que le point singulier $t = -1$. Dans le secteur

$$|\arg t| \leqq \pi - \theta \qquad (0 < \theta < \pi),$$

on a

$$\left|\frac{d^n v}{dt^n}\right| \leqq n!\left(\frac{1+\varepsilon}{\sin\theta}\right)^n K e^{\sigma' |t|},$$

où ε est un nombre positif arbitrairement choisi, σ' un nombre plus grand que l'inverse σ du rayon de convergence de la série $h(x)$, K un nombre suffisam-

ment grand indépendant de n et de t. L'intégrale de Laplace

$$\tau_1 = \frac{1}{x}\int_0^\infty v\, e^{-\frac{t}{x}}\, dt,$$

étendue à la demi-droite d'argument ω ($\omega < \pi$), est convergente dans le cercle défini par l'inégalité

$$\text{partie réelle } \frac{e^{i\omega}}{x} > \sigma;$$

les intégrales de Laplace correspondant aux valeurs de ω comprises entre $-\pi$ et $+\pi$ représentent, dans la partie du plan formé des aires des cercles correspondants, l'intégrale τ_1 de l'équation donnée.

3. L'auteur revient au cas général pour lui appliquer les résultats précédents. Soient $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{k}}$ et $\xi = x^k$. Les intégrales τ_{1m} peuvent s'exprimer au moyen de k fonctions $\varphi_p(\xi)$ par les formules

$$\tau_{1m}(\alpha^m x) = \sum_{p=0}^{k-1} (\alpha^m x)^p \varphi_p(\xi),$$

valables pour

$$\frac{-\frac{3\pi}{2} + \delta}{k} \leqq \arg x \leqq \frac{\frac{3\pi}{2} - \delta}{k}.$$

On a, pour

$$|\xi| \leqq r^k \sin\delta', \qquad |\arg\xi| \leqq \frac{3\pi}{2} - \delta \qquad \left(0 < \delta' < \pi,\ 0 < \delta < \frac{3\pi}{2},\ \delta' < \delta\right),$$

la formule

$$\varphi_p = c_p + c_{p+k}\xi + \ldots + c_{p+nk}\xi^n + \gamma_{pn}\xi^{n+1},$$

avec

$$|c_{p+nk}| \leqq \lambda_0 n!\,(k(1+\varepsilon))^n, \qquad |\gamma_{pn}| \leqq \mu_0 n!\left(\frac{k(1+\varepsilon)}{\sin\delta'}\right)^n.$$

Les fonctions associées de Borel

$$v_p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{p+nk}\, t^n}{n!}$$

satisfont aux équations différentielles

$$(kt+1)\frac{dv_p}{dt} + (a_k + p)v_p + a_1\frac{dv_{p-1}}{dt} + \ldots$$
$$+ a_p\frac{dv_0}{dt} + a_{p+1}v_{k-1} + \ldots + a_{k-1}v_{p+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{p+nk}\, t^{n-1}}{(n-1)!}$$
$$(p = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Elles n'ont à distance finie que le point singulier $t = -\frac{1}{k}$; dans le secteur

$$|\arg t| \leqq \pi - \theta \qquad (0 < \theta < \pi),$$

on a

$$\left|\frac{d^n v_p}{dt^n}\right| = n!\left(\frac{k(1+\varepsilon)}{\sin\theta}\right)^n K\, e^{\tau k|t|}.$$

L'intégrale de Laplace

$$\frac{1}{\xi}\int_0^\infty v_p\, e^{-\frac{t}{\xi}}\, dt,$$

étendue à la demi-droite d'argument ω (compris entre $-\pi$ et $+\pi$), est convergente quand la partie réelle de $\frac{e^{i\omega}}{\xi}$ est supérieure à τ, et y représente la fonction $\varphi_p(\xi)$,

4. Il est possible de développer les intégrales τ_{lm} en séries convergentes de facultés, en s'appuyant sur des théorèmes de Watson (*Rendiconti di Palermo*, t. XXXIV). C'est ainsi que, dans le cas $k=1$, on a un développement de la forme

$$\tau_l = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\left(\frac{M e^{i\omega}}{x}+1\right)\cdots\left(\frac{M e^{i\omega}}{x}+n\right)},$$

valable à l'intérieur du cercle de centre $\frac{r}{2}e^{i\omega}$ et de rayon $\frac{r}{2}$. On a des développements analogues pour $\varphi_p(\xi)$ et par suite pour les τ_{lm}, dans le cas où k est quelconque.

Sturm (*Rudolf*). — Démonstration de l'existence du point dont la somme des distances à quatre points donnés est minima (241-249).

Dans ce même journal (t. XCVII, 1884, p. 49), l'auteur s'est occupé du problème du minimum de la somme des distances d'un point variable à quatre points donnés. Il a démontré que ce minimum a lieu pour l'un des sommets du tétraèdre formé par ces quatre points si l'*excès* de ce sommet (c'est-à-dire la différence entre la somme des faces du trièdre formé par les arêtes issues de ce sommet et 180°) est au moins égale à 180°. Si les excès des quatre sommets sont tous inférieurs à 180°, le point M, s'il existe, qui correspond au minimum, jouit des propriétés suivantes :

Il est à l'intérieur du tétraèdre; de plus, les quatre demi-droites a, b, c, d qui le joignent aux quatre points donnés A, B, C, D sont telles que l'angle de deux quelconques d'entre elles est égal à l'angle des deux autres, que les bissectrices de ces deux angles égaux sont dans le prolongement l'une de l'autre et que les trois droites indéfinies qui portent les bissectrices des six angles des quatre demi-droites a, b, c, d, prises deux à deux, sont deux à deux rectangulaires.

La figure formée par les quatre demi-droites a, b, c, d contient ainsi quatre trièdres d'excès égal à 180° et ces quatre trièdres sont superposables.

S'il existe un point M jouissant des propriétés précédentes, il réalise le minimum cherché. Le présent article est consacré à la démonstration de l'existence de ce point. L'auteur s'appuie sur la considération du lieu des points P

tels que le trièdre obtenu en joignant le point P à trois points fixes A, B, C ait un excès égal à 180°.

Remak (*R.*). — Calcul de la solution de l'équation de Pell, en s'appuyant sur la démonstration d'existence de Dirichlet (250-254).

Dirichlet a, sans faire appel à la théorie des fractions continues, démontré l'existence d'une solution non triviale de l'équation de Pell

$$t^2 - Du^2 = 1;$$

mais on ne peut, de sa démonstration, tirer aucune méthode directe pour calculer la plus petite solution positive T, U. L'auteur montre qu'on peut présenter la démonstration de Dirichlet de manière que la possibilité de ce calcul s'en déduise.

A chaque nombre entier positif m on peut facilement faire correspondre, parmi tous les couples de deux entiers positifs a, b, le second étant au plus égal à m, le couple a_m, b_m pour lequel $a_m - b_m\sqrt{D}$ est le plus petit possible en valeur absolue. On a l'inégalité

$$a_m^2 - b_m^2 D \leqq [\sqrt{4D}],$$

en désignant par $[x]$ la partie entière de x.

Si m_1 est un entier donné, on peut d'autre part déterminer un entier m_2 tel que $b_{m_2} > b_{m_1}$. Il suffit, pour cela, que l'on ait

$$m_2 > 2m_1\sqrt{D}.$$

En prenant alors $m_0 = 1$, $m_s = ([\sqrt{4D}]+1)^s$, on a

$$b_{m_{q+1}} > b_{m_q}.$$

Soit $A = 2[\sqrt{4D}]^3$. Les $A+1$ nombres $b_{m_0}, \ldots, b_{m_A}$ donnent au moins $[\sqrt{4D}]^2+1$ fois la meme valeur pour $a_{m_q}^2 - b_{m_q}^2 D$; soit k cette valeur. Parmi les $[\sqrt{4D}]^2+1$ couples (a, b) correspondants, il y en a au moins deux (a', b') et (a'', b'') qui sont congrus (mod k). Dans ces conditions, on peut poser

$$(a' - b'\sqrt{D})(a'' + b''\sqrt{D}) = k(t + u\sqrt{D}),$$

t et u étant entiers, et l'on a

$$t^2 - Du^2 = 1.$$

On a du reste

$$t < ([\sqrt{4D}]+1)^{A+1},$$
$$u < ([\sqrt{4D}]+1)^{A}.$$

Ostrowski (*A.*). — Sur quelques questions de la théorie générale des corps (255-284).

1. Dans un article récent (même journal, t. CXLII, p. 211), M. Kurschák a

introduit dans la théorie des corps une nouvelle notion, celle de *valorisation*. Valoriser un corps K c'est faire correspondre à chaque nombre a de ce corps un nombre réel positif $\| a \|$, nul si a est nul, de telle manière que l'on ait

$$\| 1 + a \| \leqq 1 + \| a \|,$$
$$\| a . b \| = \| a \| . \| b \|.$$

Un corps valorisé est dit *parfait* lorsque toute suite infinie *fondamentale*

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots$$

admet une *limite :* la suite est dite *fondamentale* lorsque $\| a_{n+q} - a_n \|$ peut être rendu aussi petit qu'on veut pour n suffisamment grand, q étant quelconque; la suite est dite *admettre* la limite A lorsque $\| A - a_n \|$ tend vers zéro pour n infini.

Kürschák a démontré que tout corps valorisé peut, par l'adjonction d'éléments nouveaux convenablement choisis, être prolongé en un corps valorisé, algébriquement fermé, parfait; un corps est dit *algébriquement fermé* lorsque tout polynome algébrique est décomposable en un produit de facteurs linéaires (dont les coefficients appartiennent au corps). Kürschák valorise le prolongement algébrique d'un corps K en donnant à chaque nombre α du corps prolongé la valorisation $\| a \|^{\frac{1}{n}}$, où a est le terme constant de l'équation, irréductible en K :

$$x^n + \ldots + a = 0,$$

à laquelle satisfait α.

Il peut arriver que le *plus petit* prolongement algébriquement fermé d'un corps K ne soit pas parfait; Kürschák pose, en particulier, la question de savoir s'il en est ainsi pour le corps K des nombres rationnels p-adiques. L'auteur démontre dans cet article que, pour que le plus petit prolongement algébriquement fermé d'un corps parfait K soit parfait, il faut et il suffit que ce prolongement soit *fini* par rapport à K. Mais avant de démontrer ce théorème général, il démontre directement que le plus petit prolongement algébriquement fermé du corps des nombres rationnels p-adiques n'est pas parfait.

A cet effet, il forme une série

$$\sum_{c=1}^{c=\infty} a_c p_c \xi_c,$$

où les a_c sont pris parmi la suite des entiers $0, 1, \ldots, p-1$, et où les ξ_c sont définis comme racines des équations irréductibles

$$\xi_c^{m_c} = p,$$

les m_c étant des entiers qui satisfont aux inégalités

$$m_i > m_{i-1}.$$

La suite des sommes partielles de la série considérée est fondamentale, mais la limite de cette suite, si elle existe, ne satisfait à aucune équation algébrique dans le corps K (p) : c'est un nombre p-adique *transcendant*.

2. Pour démontrer son théorème général, l'auteur va s'appuyer sur la notion de *permutation*. Étant donnés un premier corps K et un second corps $\mathfrak{K}$ contenant K, on dit qu'on a une permutation de K lorsqu'on a fait correspondre à tout nombre de K un nombre de $\mathfrak{K}$, cette correspondance respectant les opérations de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division. Toute permutation laisse invariants les nombres rationnels.

Étant donnés un corps K et un de ses prolongements A, on peut étudier les permutations ψ du corps A qui, appliquées aux éléments de K, produisent le même effet qu'une permutation donnée φ de K : ces permutations ψ sont dites des *multiples* de φ.

A ce point de vue, l'auteur s'occupe d'abord du cas où A est un prolongement fini de *première espèce :* on entend par là, avec Steinitz, que l'équation, irréductible dans K, à laquelle satisfait un nombre quelconque de A, a ses racines toutes distinctes. Dans ce cas, il existe des permutations ψ multiples de φ et leur nombre est égal à l'ordre de A par rapport à K. Si φ est la permutation identique, les corps $\psi(A)$ sont les *conjugués* de A par rapport à K.

Le prolongement fini de première espèce A est dit *normal* si A coïncide avec ses conjugués, ou encore si toute équation algébrique irréductible dans K et admettant une racine dans A a son premier membre décomposable dans A en un produit de facteurs linéaires. Cette dernière propriété peut servir de définition aux prolongements normaux, *même infinis*.

Cela posé, l'auteur démontre d'une manière générale que *si le corps* U *est un prolongement algébrique normal infini de première espèce du corps* K, *et si* φ *est une permutation de* K, *il y a au moins une permutation* ψ *de* U *qui soit multiple de* φ. Il y en a, du reste, une infinité. Ce théorème est démontré en utilisant les axiomes de Zermelo.

Il est complété par l'examen du cas d'un prolongement quelconque.

Une conséquence particulière des résultats obtenus permet de répondre à une question posée en 1900 par Dedekind sur l'existence de certaines permutations du corps des nombres réels : c'est ainsi qu'on peut affirmer l'existence d'une infinité de permutations du corps des nombres réels changeant $+\sqrt{2}$ en $-\sqrt{2}$.

3. L'auteur arrive maintenant à la recherche des prolongements algébriquement fermés des corps parfaits. Il démontre d'abord trois lemmes :

1° *Tout prolongement fini de première espèce d'un corps parfait est parfait;*

2° *Tout prolongement algébrique infini de première espèce d'un corps parfait n'est pas parfait;*

3° *Si le plus petit prolongement algébriquement fermé* M *d'un corps parfait* K *est infini, il existe un corps* N *contenu dans* M *et prolongement algébrique infini de première espèce de* K.

Ces trois lemmes démontrent le théorème général annoncé :

Pour que le plus petit prolongement algébriquement fermé d'un corps parfait soit parfait, il faut et il suffit qu'il soit fini.

Les démonstrations supposent essentiellement que les prolongements d'un corps valorisé K sont valorisés suivant le procédé de Kurschak, ou tout au moins que deux éléments qui satisfont à la même équation irréductible dans K ont la même valorisation.

Koschmieder (*Lothar*). — Application des équations intégrales à un problème de thermo-élasticité (285-293).

L'équation linéaire de la propagation de la chaleur de Fourier fournit l'exemple physique le plus simple d'une équation intégrale homogene à noyau symétrique. Si l'on admet que les molécules entrent en vibration, on obtient le problème linéaire de Duhamel, qui fournit l'exemple physique le plus simple d'une équation intégrale homogène à noyau dissymétrique, et qui soulève le problème du développement correspondant d'une fonction arbitraire.

Le problème de Duhamel est défini par les équations

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t},$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$V\Big|^{0,1} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|^{0,1} = 0;$$

x désigne la distance à l'origine de la barre supposée de longueur 1, t désigne le temps, V la température et u l'élongation élastique.

On obtient des solutions particulières du problème en posant

$$\begin{aligned} V_n &= C_n e^{-\frac{a^2 c^2 n^2 \pi^2}{b^2 + c^2} t}\, n \pi c^2 \sin n \pi x \\ u_n &= C_n e^{-\frac{a^2 c^2 n^2 \pi^2}{b^2 + c^2} t}\, (1 - \cos n \pi x) \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si l'on se donne l'état initial

$$V\Big|^{t=0} = M(x), \qquad u\Big|^{t=0} = N(x),$$

il s'agit de développer les deux fonctions $M(x)$ et $N(x)$ en séries procédant respectivement suivant les termes V_n et u_n.

La fonction X_n satisfait à l'équation intégrale, à noyau dissymétrique,

$$X_n(y) = \lambda_n \int_0^1 X_n(x)\, K(x, y)\, dx \qquad (\lambda_n = n^2 \pi^2),$$

où l'on a posé

$$K(x, y) = x - y - \frac{y^2}{2}, \qquad x < y,$$

$$K(x, y) = \frac{y^2}{2}, \qquad x > y.$$

La fonction conjuguée $\overline{X_n} = - C_n \cos n \pi x$, satisfait de son côté à l'équation intégrale

$$\overline{X_n}(y) = \lambda_n \int_0^1 \overline{X_n}(x)\, K(y, x)\, dx.$$

Toute fonction $\Phi(y)$ continue, admettant une dérivée première continue et une dérivée seconde continue sauf en un nombre fini de points, est représentable sous la forme

$$\Phi(y) = \int_0^1 K(x, y) f(x)\, dx.$$

De même toute fonction $\Psi(y)$ jouissant des mêmes propriétés, mais telle qu'on ait en outre

$$\int_0^1 \Psi(\alpha)\, d\alpha = 0,$$

est représentable sous la forme

$$\Psi(y) = \int_0^1 K(y, x) g(x)\, dx.$$

Dans ces conditions, les deux fonctions sont développables en séries de fonctions fondamentales. Pour avoir ces fonctions fondamentales, l'auteur calcule le noyau résolvant $\Gamma(x, y)$ de $K(x, y)$; on obtient

$$\Gamma(x, y) = \frac{\cos\sqrt{\lambda}(1-x) - \cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}(1-y)}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}, \qquad x < y,$$

$$\Gamma(x, y) = \frac{1-\cos\sqrt{\lambda}y}{\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}\cos\sqrt{\lambda}(1-x). \qquad x > y.$$

En décomposant cette fonction méromorphe de λ en élément simples, on trouve facilement

$$\Gamma(x, y) = \sum_n^{1,\infty} \frac{-\sqrt{2}\cos n\pi x\sqrt{2}(1-\cos n\pi y)}{n^2\pi^2 - \lambda},$$

d'où, en particulier pour $\lambda = 0$,

$$K(x, y) = \sum_n^{1,\infty} \frac{-\sqrt{2}\cos n\pi x\sqrt{2}(1-\cos n\pi y)}{n^2\pi^2} = \sum_n^{1,\infty} \frac{\overline{X}_n(x) X_n(y)}{\lambda_n}$$

avec les fonctions fondamentales $\overline{X}_n(x)$, $X_n(y)$ qui forment un système biorthogonal normal.

Pál (Julius). — Sur l'existence d'une courbe de Jordan $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, pour une fonction $\varphi(t)$ donnée (294-299).

Soit $\varphi(t)$ une fonction définie et continue pour toutes les valeurs de t et admettant la période 2π. Existe-t-il une fonction $\psi(t)$ définie et continue, de période 2π, telle que les équations

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

définissent une courbe de Jordan (fermée, sans point double)?

L'auteur donne d'abord un exemple de fonctions $\varphi(t)$ pour laquelle le choix

de la fonction complémentaire $\psi(t)$ est impossible; il suffit de supposer

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi(2\pi) = 0, \qquad \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \varphi\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

et la fonction $\varphi(t)$ linéaire dans chacun des intervalles

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right).$$

L'auteur introduit la notion de « pont ». Étant donnée une fonction $f(t)$ définie et continue dans l'intervalle (a, b), l'intervalle (α, β) est dit un *pont* si $f(t)$ prend, aux deux extrémités de cet intervalle, sa valeur minima et sa valeur maxima, sans qu'elle prenne entre α et β aucune de ces deux valeurs extrêmes.

Cela posé, il est facile de voir que la fonction $\varphi(t)$ ne peut admettre de fonction complémentaire $\psi(t)$ que si, dans tout intervalle $(\xi, \xi + 2\pi)$, il n'y a pas plus de deux ponts. L'auteur démontre ensuite rigoureusement que cette condition est suffisante.

Zervos (*P.*). — Sur l'intégration de certains systèmes indéterminés d'équations différentielles (300-312).

Dans un paragraphe de son article *Sur la notion de classe d'équations différentielles* (Jubilé Heinrich Weber, 5 mars 1912), Hilbert a démontré qu'il n'existe pour l'équation

$$\frac{dz}{dx} = \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2$$

aucune solution ayant la forme

$$x = \varphi(t, w, w_1, \ldots, w_r), \quad y = \psi(t, w, w_1, \ldots, w_r), \quad z = \chi(t, w, w_1, \ldots, w_r),$$

où par w on désigne une fonction arbitraire de t et par w_i la dérivée de cette fonction de l'ordre i.

I. En s'appuyant sur l'analyse de Hilbert, l'auteur démontre la même propriété négative pour les équations plus générales

$$\sigma\left(\frac{dz}{dx}\right) = F\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right), \qquad \sigma\left(\frac{d^2 z}{dx^2}\right) = F\left(\frac{d^3 y}{dx^3}\right);$$

il indique en outre d'autres généralisations des propositions de Hilbert.

II. L'auteur étudie ensuite certains systèmes de Monge, auxquels on peut appliquer la méthode d'intégration donnée par M. Goursat dans son Mémoire sur le problème de Monge (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXXIII, 1905).

E. Cartan.

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO.

Tome XI, 1897 (¹). (1re Partie : *Memorie e Communicazioni.*)

Humbert (*G.*). — Sur une génération géométrique de la surface de Kummer (1-11).

L'auteur se propose d'établir la proposition suivante : *Les quadriques* Q *quadritangentes à deux quadriques données* A *et* B *et passant par un point donné ont pour enveloppe une surface de Kummer.* Cet énoncé suppose d'ailleurs que les deux génératrices a_1 et a_2 qui font partie de l'intersection de Q avec A et les deux autres analogues pour Q et B appartiennent sur Q à des systèmes différents. Il existe alors un quadrilatère gauche inscrit à la biquadratique (AB) et formé de génératrices de A et B; ceci entraîne une relation entre les quadriques A et B, relation facile à obtenir au moyen de la représentation elliptique de (AB); lorsqu'elle est vérifiée, il existe une infinité double de quadriques Q.

L'auteur établit ensuite les théorèmes suivants : I. *Les quadriques* $A = 0$, $B = 0$ *doivent être telles que le produit* AB *soit décomposable en une somme de quatre carrés.* — II. *Les quadriques* Q *sont conjuguées par rapport à deux droites fixes* (d'où la relation $\Delta\Theta'^2 = \Delta'\Theta^2$ entre les invariants des deux formes A et B). — III. *Les génératrices de* A *et* B *appartiennent à un même complexe linéaire.* Le travail de M. Humbert se termine par la démonstration du théorème fondamental, l'établissement de sa réciproque et la détermination géométrique des éléments singuliers de la surface de Kummer.

De Franchis (*M.*). — Sur la courbe lieu des contacts d'ordre k des courbes d'un faisceau avec les courbes d'un système linéaire $\varkappa^k$ (second Mémoire) (12-42).

Ce Mémoire constitue la suite d'un travail antérieur du même auteur sur le même sujet (²). Considérons, dans un plan π, un faisceau linéaire de courbes (C) et un système linéaire $\varkappa^k$ de courbes $[\Gamma]^k$; appelons $\Omega^k_{C\Gamma}$ la courbe lieu des contacts d'ordre k des courbes C avec les courbes Γ; l'auteur se propose d'appliquer des résultats qu'il a obtenus précédemment sur $\Omega^k_{C\Gamma}$. Un premier Chapitre est consacré à l'étude des points multiples d'une série linéaire appartenant à une courbe algébrique; la considération de la courbe $\Omega^k_{C\Gamma}$ permet d'établir, sans sortir du plan π, des théorèmes obtenus moyennant des considérations hyperspatiales par Brill, Castelnuovo, Segre, Guccia. Soient P un point r^{ple} de C, R une branche de C, d'origine P et n'ayant en P aucun contact avec les autres branches de C; et soit g^k_ν une série linéaire d'ordre ν, de dimension k, appartenant à C. Imposons à une série g^k_ν contenue dans g^k_ν le point P comme

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVIII, 1914, p. 136-146. — Le Tome X, 1896, sera analysé ultérieurement.

(²) *Rendiconti del Circ. Mat. di Palermo*, t. X, p. 118-152.

point base d'ordre σ_i aussi élevé que possible (en général on aura $\sigma_i = i$) : nous dirons que la série g_ν^k possède en P la caractéristique

$$[\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_k] \qquad (0 \leq \sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_k \leq \nu - k).$$

L'auteur est alors conduit à donner une définition géométrique des cycles d'ordre λ (qu'il développera dans un autre Mémoire du même Tome des *Rendiconti*); puis il retrouve des résultats obtenus par divers géomètres, notamment de Jonquières et Segre.

Le second Chapitre étudie la décomposition de $\Omega_{C\Gamma}^k$ et le lieu des points sextactiques des courbes d'un faisceau (d'ordre $n > 2$); plus généralement, il recherche le lieu des points où les courbes d'un faisceau (d'ordre n) ont des contacts d'ordre $\frac{m(m+3)}{2}$ avec les courbes d'ordre m $(2 < m < n)$. Enfin, l'auteur étudie les contacts des courbes d'un faisceau avec celles d'un système linéaire, les contacts devant avoir lieu en des points-base, et il conclut en recherchant les points où les courbes (C) d'un faisceau ont un contact d'ordre ξ avec les courbes d'un réseau : ceci permet notamment d'énumérer les points d'ondulation des courbes (C).

Amici (*N.*). — Sur la résolution de la congruence

$$x^{2^k} \equiv b \qquad (\text{mod}\, p^\lambda)$$

(43-57).

L'auteur ramène le problème au suivant : *Résolution de la congruence*

$$x^{2^k} \equiv b \qquad (\text{mod}\, p)$$

(*p, nombre entier impair*). Puis, trois cas sont à distinguer suivant qu'on a

$$p = 2^s h + 1 \qquad \text{avec } k = s,\ k > s \text{ ou } k < s.$$

Dans le premier cas la congruence n'est possible que si l'on a

$$b^h \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, p);$$

s'il en est ainsi, l'auteur montre qu'on obtient toutes les racines de la congruence, et chacune une fois seulement, au moyen de la formule

$$x_{s-2} \equiv \pm b^{2^{s-r-1}q}\, g^{2^{s-r-1}h\,\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \ldots + 2^{r-2}\varepsilon_{r-1} + 2^{r-1}\varepsilon_r} \qquad (\text{mod}\, p),$$

où l'on a $\varepsilon_i = 0$ ou 1; g est un non-résidu de p; l'entier q est racine de l'équation $-h\alpha + 2^s q = 1$ (α, entier). Il existe des formules analogues dans les deux autres cas.

Pieri (*M.*). — Sur l'ordre de la variété engendrée par des systèmes linéaires homographiques (58-63).

L'auteur donne une démonstration directe d'un théorème de K. Th. Vahlen sur l'ordre de la variété lieu géométrique des intersections de k variétés va-

riables; ces variétés sont situées dans un espace S_n; elles ont $n-1$ dimensions; leurs ordres sont $n_1, \ldots, n_k$; les systèmes linéaires auxquels elles appartiennent dépendent linéairement de i paramètres variables; enfin, on suppose ces variétés assujetties à des relations homographiques. L'ordre cherché est la somme des combinaisons de classe $k-i$ des nombres n_j, chacune étant considérée comme le produit de ses éléments.

Burali-Forti (*C.*). — La méthode de Grassmann en Géométrie projective (seconde Note) (64-82).

Cette Note est la suite d'une Note antérieure insérée aux *Rendiconti* (t. X, p. 177-195).

L'auteur se propose d'étudier les propriétés des homographies qui, à toute forme P de première espèce (au sens de Grassmann), font correspondre une forme de première espèce, fonction linéaire de P et d'une forme fixe W, de première espèce; une telle homographie est dite *collinéaire*, et la forme W s'appelle une *forme-centre*. Le principe de dualité permet d'étendre les résultats aux formes de troisième espèce. Pour des valeurs particulières attribuées aux constantes des transformations, on est amené à étudier et à classer successivement : 1° les collinéations; 2° l'homologie (y compris l'homothétie, la congruence et la translation); 3° la projectivité (y compris la projection centrale). Après l'étude détaillée de ces transformations, l'auteur énonce des théorèmes importants pour l'application aux problèmes métriques de la Géométrie descriptive.

Volterra (*V.*). — Sur le principe de Dirichlet (83-86).

La Note de M. Volterra apporte un complément essentiel à la démonstration de Neumann. Considérons le cas du plan. Soient U une fonction finie et continue sur le contour et P son adjointe; la méthode de Neumann repose sur l'inégalité

$$\frac{\text{oscill. P}}{\text{oscill. U}} < \lambda < 1,$$

où la constante λ ne dépend que de la forme du contour. Or, une telle démonstration n'est rigoureuse que lorsqu'il est possible de découper sur le contour un nombre fini d'arcs tels que, en chacun de leurs points, U soit supérieur à sa valeur moyenne et tels que sur le reste du contour U soit inférieur ou égal à cette valeur. Mais, déjà dans le cas du potentiel logarithmique, la circonstance opposée peut fort bien se présenter : par exemple, lorsque la fonction continue U possède un nombre infini de maxima et de minima. La méthode de M. Volterra a pour but de supprimer cette objection; elle consiste à regarder toute fonction finie et continue comme limite d'une fonction possédant un nombre limité de maxima et de minima, et tendant uniformément vers la première.

Supposons qu'il s'agisse du problème dans le plan. L'équation

$$y = U(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

représente une ligne L dans le plan (x, y); divisons (ab) en n_1 parties de telle sorte que l'oscillation de $U(x)$ correspondant à chacune d'elles soit infé-

rieure à σi^{-1}; prenons les points de L qui correspondent à cette subdivision comme sommets d'une ligne brisée d'équations $y = f_i(x)$ et considérons la série

$$U_i = f_i - f_{i-1}, \qquad f_0 = 0.$$

Cette série sera uniformément convergente, comme celle des fonctions adjointes P_i, et l'on aura, quel que soit n,

$$\frac{\text{oscill.} \sum_1^n P_i}{\text{oscill.} \sum_1^n U_i} < \lambda,$$

d'où

$$\frac{\text{oscill. P}}{\text{oscill. U}} = \frac{\text{oscill.} \sum_1^\infty P_i}{\text{oscill.} \sum_1^\infty U_i} \leqq \lambda.$$

La méthode s'étend au cas de l'espace; elle s'applique à d'autres problèmes et fournit notamment une démonstration intuitive du théorème de Weierstrass sur la représentation des fonctions continues par des séries de polynomes.

Bagnera (*G.*). — Sur la construction du groupe de l'icosaèdre (87-89).

La Note a pour but de rectifier une erreur du *Lehrbuch der Algebra* de H. Weber.

Bucca (*F.*). — Sur le développement d'une fonction uniforme de variable complexe, possédant des singularités isolées, en série à caractéristiques séparées (90-103).

Une fonction $f(x)$, méromorphe dans tout le plan, et possédant aux pôles

$$0, \quad a_1, \quad \ldots, \quad a_l, \quad \ldots,$$

les parties principales

$$G_0\left(\frac{1}{x}\right), \quad G_1\left(\frac{1}{x-a_1}\right), \quad \ldots, \quad G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right), \quad \ldots,$$

peut se développer, suivant le théorème de M. Mittag-Leffler, en une série de la forme

$$f(x) = G_0\left(\frac{1}{x}\right) + \sum_{l=1}^{\infty}\left[G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right) - P_l(x)\right],$$

où les $P_l(x)$ sont des polynomes en x. Si l'on recherche les polynomes P_l les

plus généraux possible qui rendent convergente la série précédente (les G_l étant donnés), cette série représentera, non pas $f(x)$, mais une autre fonction méromorphe $F(x)$ telle qu'on ait

$$f(x) - F(x) = g(x),$$

$g(x)$ étant une fonction entière, en général non identiquement nulle. Le travail de M. Bucca a précisément pour objet la détermination explicite de cette fonction entière. S'appuyant sur le théorème de Cauchy, il montre qu'on peut écrire

$$g(x) = \sum_{\nu=0}^{+\infty} x^\nu \sum_{l=0}^{+\infty} (\sigma_{\nu+1,l} + A_{l,\nu})$$

avec $P_l = \sum_{\nu=0}^{m_l-1} A_{l,\nu} x^\nu$ et $\sigma_{\nu+1,l}$ désignant le résidu en a_l de $x^{-\nu-1} f(x)$. Lorsque $f(x)$ est d'ordre fini m, on a

$$m_l = m$$

et

$$f(x) = \sum_{\nu=m}^{\infty} x^\nu \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{\nu+1,l} + \sum_{l=0}^{+\infty} \left[G_l\left(\frac{1}{x-a_l}\right) + \sum_{\nu=0}^{m-1} \sigma_{\nu+1,l} x^\nu \right],$$

ce que l'auteur appelle le *développement principal de* $f(x)$. Il établit que, lorsqu'on peut trouver un entier r tel qu'on ait $|x^{-r-1} f(x)| < M$ sur des cercles C_k, de rayons indéfiniment croissants, ne passant pas par les a_l (et M ne dépendant pas de k), la fonction $f(x)$ admet un développement principal d'ordre r; il termine par une application à la fonction $\cot x$, et par une comparaison de ses résultats avec ceux d'Hermite.

De Franchis (*M.*). — Sur une théorie géométrique des singularités d'une courbe algébrique plane (104-153).

Ce Mémoire a pour objet d'exposer la théorie des singularités d'une courbe algébrique plane au moyen de la théorie des séries linéaires appartenant à la courbe; il s'appuie sur les résultats obtenus par l'auteur dans son Mémoire précédent, paru au même Tome des *Rendiconti*. Dans un premier Chapitre, l'auteur rappelle la définition qu'il a donnée d'un cycle; il étudie l'intersection d'un cycle avec une courbe algébrique, ce qui le conduit à retrouver des résultats d'Halphen. Le Chapitre II recherche l'effet d'une transformation quadratique sur les singularités d'une courbe algébrique; l'auteur retrouve la théorie de Nœther sur l'abaissement du genre dû à la présence d'un point singulier. Le cas des cycles d'ordre égal à la classe est particulièrement délicat; l'auteur l'étudie en détail et définit l'indice, l'hyperclasse et les combinaisons caractéristiques d'un tel cycle; à la notation près, ces combinaisons coïncident avec celles d'Halphen. Les deux derniers Chapitres ont pour objet la construction de cycles à caractéristiques données, l'intersection de deux cycles, le calcul de l'abaissement produit sur le genre par une singularité quelconque, et les définitions de singularités égales et de singularités semblables.

Burali-Forti (*C.*). — Une question sur les nombres transfinis (154-164).

Dans cette Note, M. Burali-Forti se propose de démontrer l'existence effective de nombres transfinis (ou types d'ordres) a, b, tels que a n'est ni égal, ni inférieur, ni supérieur à b. L'auteur se sert des notations symboliques du *Formulaire* de la *Rivista di Matematica*, ainsi qu'il l'avait déjà fait dans un travail analogue, paru au Tome VIII du même Recueil. Il débute par un résumé de quelques définitions et théorèmes établis antérieurement par M. G. Cantor et par lui-même. Les points de départ des deux auteurs ne sont d'ailleurs pas exactement les mêmes; M. G. Cantor appelle *classe bien ordonnée* toute classe u satisfaisant aux conditions suivantes :

a. Il existe dans u un premier élement.

b. Tout élément de u, qui est suivi par d'autres éléments, en possède un immédiatement consécutif.

c. Soit u_1 une classe contenue dans u et telle qu'il existe dans u des éléments supérieurs à ceux de u_1; il doit exister dans u un élément a tel qu'il n'en existe aucun autre inférieur à lui et supérieur à ceux de u_1.

Telle est la forme que M. G. Cantor donnait à sa définition dans un Mémoire du Tome XLIX des *Mathematische Annalen* paru en même temps que l'article actuel de M. Burali-Forti; or, ce dernier article envisage comme classe bien ordonnée (au sens de M. G. Cantor), toutes celles qui satisfont aux conditions a et b seulement, et il introduit en outre le concept de classe *parfaitement ordonnée* (classe satisfaisant à a, b et à une troisième condition). L'auteur considère donc les classes parfaitement ordonnées comme des cas particuliers des classes bien ordonnées, ce qui est inexact. M. Burali-Forti rectifiera lui-même son assertion dans une Note insérée à la fin du Tome.

Pincherle (*S.*). — Sur les séries procédant suivant les dérivées successives d'une fonction (165-175).

Les séries ordonnées suivant les dérivées successives d'une fonction sont très importantes dans les applications au Calcul fonctionnel; elles sont très maniables et rappellent par plus d'un point les séries de Taylor. M. S. Pincherle commence par établir un théorème général sur la convergence de ces séries :

Soit T *une région simplement connexe du plan complexe* (x); *définissons en tout point de* T *une fonction uniforme* $\rho(x)$, *continue, réelle et positive; enfin, soit* $\alpha_n(x)$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *une suite infinie de fonctions holomorphes dans* T *et satisfaisant à la condition* $|\alpha_n(x)| < \rho^n(x)$. *On peut déterminer dans* T *une aire* T_1 *telle que l'expression*

$$(a) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n(x)}{n!} \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n},$$

où $\varphi(x)$ *est une fonction holomorphe dans* T_1, *représente une série absolument et uniformément convergente dans* T_1. *L'ensemble des fonctions* $\varphi(x)$

qu'on pourra choisir s'appellera le champ fonctionnel de convergence *de la série* (a).

Comme application, M. Pincherle envisage l'équation non homogène

$$F(\psi) = \frac{d^m\psi}{dx^m} + \pi_1 \frac{d^{m-1}\psi}{dx^{m-1}} + \ldots + \pi_m \psi = \varphi(x),$$

où $\pi_1, \ldots, \pi_m, \varphi$ sont holomorphes dans T; il montre comment on peut représenter la solution de cette équation [soit $\psi = F^{-1}(\varphi)$] au moyen d'une série (a). Enfin, il termine par une application aux équations à coefficients constants.

Morera (*G.*). — Sur les polynomes de Legendre (176-180).

Établissement des propriétés fondamentales de ces polynomes.

Lauricella (*G.*). — Sur les températures stationnaires (189-192).

Dans son Mémoire *Sur les équations de la Physique mathématique* (§ 9), inséré dans ce Recueil (t. VIII, 1894), M. H. Poincaré substitue à l'équation au contour

$$\frac{\partial v}{\partial n} + hv = 0$$

une autre équation qu'il appelle *condition modifiée*. M. G. Lauricella montre qu'on peut éviter ce détour, et obtenir les résultats de M. H. Poincaré, en utilisant les théorèmes établis par ce dernier sur la convergence uniforme de certaines séries ordonnées suivant les puissances d'un paramètre.

Poincaré (*H.*). — Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre et du premier degré (193-239).

Le Mémoire de M. H. Poincaré constitue la suite d'un travail de l'auteur sur le même sujet, inséré au Tome V (1891) des *Rendiconti*: dans le présent Mémoire, l'auteur généralise quelques-uns de ses anciens résultats, mais il a surtout pour but de mettre en lumière toute la difficulté du problème. En général, il est impossible de décider au bout d'un nombre fini d'opérations rationnelles si une équation du premier ordre (et du premier degré) est intégrable algébriquement. Ce problème, abordé par M. G. Darboux dans un travail magistral, fut ensuite étudié simultanément par M. Autonne, M. Painlevé et M. H. Poincaré. Dans son Mémoire couronné, ainsi que dans les *Leçons*... professées à Stockholm, M. Painlevé montrait que « la question ne peut faire aucun progrès nouveau si l'on n'introduit pas, d'une manière ou d'une autre, des conditions (distinctes de celles que nous possédons déjà) pour exprimer que l'intégrale est irréductible ». Et il ajoutait : « On prévoit que dans de telles recherches l'expression uniforme des coordonnées d'un point d'une courbe en fonction d'un paramètre, soit à l'aide des fonctions abéliennes, soit à l'aide des fonctions fuchsiennes, doive jouer un rôle utile : en effet, quand les coordonnées sont ainsi exprimées, l'équation algébrique qu'elles vérifient est irréduc-

tible ». C'est précisément à l'introduction des fonctions fuchsiennes qu'est consacrée la fin du Mémoire de M. H. Poincaré.

Je rappellerai d'abord les locutions et notations du premier travail de M. H. Poincaré : elles sont indispensables pour l'intelligence du Mémoire actuel.

Écrivons l'équation différentielle sous la forme homogène suivante :

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ \mathrm{L} & \mathrm{M} & \mathrm{N} \end{vmatrix} = 0,$$

où L, M, N sont des polynomes homogènes en x, y, z, de degré m. Toute la discussion repose sur l'étude de (1) dans le voisinage de m^2+m+1 points singuliers, (x_i, y_i). Considérons l'équation en S

$$\left(z\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial x} - x\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x} - \mathrm{N} - \mathrm{S}\right)\left(z\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial y} - y\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y} - \mathrm{N} - \mathrm{S}\right) - \left(z\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial y} - x\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial y}\right)\left(z\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial z} - y\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial x}\right) = 0,$$

dont les coefficients sont calculés avec leurs valeurs au point (x_i, y_i); et soient S_1 et S_2 ses deux racines. Dans le voisinage de (x_i, y_i) l'intégrale générale de (1) peut s'écrire $\mathrm{X}_1^{s_1}\mathrm{X}_2^{-s_2} = \text{const.}$, où X_1 et X_2 sont deux séries ordonnées suivant les puissances de $z_i x - x z_i$ et $z_i y - y z_i$; pour que l'intégrale générale soit algébrique, il est nécessaire que $\mathrm{S}_1 : \mathrm{S}_2$ soit rationnel. Lorsque ce rapport est positif, le point est dit un *nœud;* lorsque ce rapport est égal à 1, l'intégrale n'est plus, en général, de la forme précédente : elle contient un logarithme; si ce dernier terme est absent, on dit que le nœud est *dicritique.* Lorsqu'on a $\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2 < 0$, le point est dit un *col.* Soit $\mathrm{S}_1 : \mathrm{S}_2 = \mu : \nu$, les entiers μ et ν (premiers entre eux) sont les entiers *caractéristiques* du point singulier.

Soit $f + \mathrm{C}\varphi = 0$ l'intégrale générale de (1); pour certaines valeurs de C, dites *valeurs remarquables de la constante*, $f + \mathrm{C}\varphi$ est décomposable en un produit tel que $u_1^{\alpha_1}\ldots u_k^{\alpha_k}$; M. H. Poincaré répartit les valeurs remarquables en cinq espèces; dans les deux premières tous les α_i sont premiers entre eux; il n'en est plus ainsi quand C est de la troisième, quatrième ou cinquième espèce. Enfin le degré de la courbe $f + \mathrm{C}\varphi$ sera appelé p, son genre étant q; le degré du facteur u_i sera n_i; les ordres de multiplicité de (x_j, y_j) pour $f + \mathrm{C}\varphi$ et u_i seront λ et λ_i. Le problème de l'intégration algébrique sera considéré comme résolu lorsqu'on aura réussi à limiter supérieurement l'entier p. Tout ceci rappelé, arrivons au Mémoire de M. H. Poincaré que nous diviserons en trois parties :

Première Partie (p. 194-205). — *Extension de résultats antérieurs.* — Supposons $f + \mathrm{C}\varphi$ décomposable de deux façons, soit

$$f + \mathrm{C}\varphi = u_1^{\alpha_1}\ldots u_k^{\alpha_k} = v_1^{\alpha'_1}\ldots v_k^{\alpha'_k}$$

(avec $v_i = u_i^{h_i}$, $\alpha_i = h_i\alpha'_i$): M. H. Poincaré établit les formules

$$(3)\qquad \left(\mathrm{S}\alpha'_i x_i n'_i\right)^2 = \mathrm{S}\mu\nu\left(\mathrm{S}\alpha'_i x_i \lambda'_i\right)^2 - \mathrm{SS}\alpha'_i\alpha'_k \mathrm{H}'_{ik}(x_i - x_k)^2,$$

$$(3\,bis)\qquad \left(\mathrm{S}\alpha_i n_i x_i\right)^2 = \mathrm{S}\mu\nu\left(\mathrm{S}\alpha_i x_i \frac{\lambda'_i}{h_i}\right)^2 - \mathrm{SS}\alpha_i\alpha_k \mathrm{H}_{ik}(x_i - x_k)^2.$$

dans lesquelles $\mathbf{S}$ indique une sommation par rapport à i, $\mathbf{SS}$, par rapport à i et k, et S une sommation étendue à tous les nœuds; x_i et x_k sont deux indéterminées; H_{ik} désigne le nombre des points d'intersection des courbes

$$u_i = 0, \qquad u_k = 0$$

situés en des cols; τ'_{ik}, λ'_i, H'_{ik} ont des significations analogues pour les v.

D'autre part, soient B le nombre (connu) des cols et A_i les nombres (inconnus) des valeurs remarquables de l'espèce i; on a

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \leqq B,$$

et, d'après un théorème d'Halphen,

$$A_3 + A_4 + A_5 \leqq 2\,;$$

on ne peut donc faire qu'un nombre limité d'hypothèses sur le nombre des valeurs remarquables; s'il n'en existe aucune des trois dernières espèces, les α_i sont eux-mêmes connus et le problème est résolu; sinon, on ne connaît que les rapports $\alpha_i : \alpha_j : \alpha_k : \ldots$.

Étudions ce dernier cas; M. H. Poincaré montre qu'on peut encore limiter p si le nombre des valeurs remarquables n'excède pas 2; dans le cas contraire, soient $C_1, \ldots, C_q$ ces $q\,(>2)$ valeurs, K le nombre des facteurs relatifs à C_k; appelons $\alpha_k^1 < \alpha_k^2 < \ldots < \alpha_k^K$, $n^1, \ldots, n_k^K$ les valeurs (inconnues) des α et des n correspondant à C_k. On envisage les inégalités

$$(5) \qquad \frac{1}{\alpha_1^1} + \frac{1}{\alpha_2^1} + \ldots + \frac{1}{\alpha_q^1} > q - 2$$

et

$$(8) \qquad \frac{1}{\alpha_1^k} + \frac{1}{\alpha_2^K} + \ldots + \frac{1}{\alpha_q^k} < q - 2.$$

Si la première n'a pas lieu, l'équation n'est pas intégrable algébriquement; si l'inégalité (5), seule, est vérifiée, on peut limiter sûrement le nombre des essais; si (5) et (8) ont lieu simultanément la méthode ne donne plus rien. Mais les α sont inconnues: néanmoins, M. H. Poincaré montre qu'on peut tirer parti de (5) et (8) pour limiter p dans des cas étendus. Enfin l'auteur adjoint à (5) et (8) des relations qu'il obtient en étudiant les nœuds et qui renferment les nombres λ_i, μ, ν relatifs à chaque nœud. Or les λ_i et les n_i sont liés par les équations (3) et (3 *bis*): on peut donc se demander si, lors même que les inégalités (5) et (8) auraient lieu, on ne pourrait pas profiter de cette interdépendance pour limiter le degré p: à ce sujet, M. H. Poincaré se borne à annoncer que la discussion qu'il a tentée par cette voie conduit à la résolution d'une équation de Pell (ou d'une autre analogue); et l'équation de Pell admet une infinité de solutions.

L'existence de valeurs caractéristiques de troisième, quatrième ou cinquième espèce complique donc profondément le problème : or ce fait se présentera toujours tant qu'on ne saura pas exprimer que l'intégrale est mise sous forme irréductible.

Deuxième Partie (205-219). — *Étude d'un cas particulier.* — Soit $m = 4$; il y aura 21 points critiques: M. H. Poincaré suppose que 9 de ces points sont des nœuds dicritiques, le reste étant des cols. Par les 9 nœuds faisons passer une cubique; on prouve que la courbe $f + C\varphi = 0$ coupe la cubique en ces 9 nœuds seulement. Appelons $u_1, \ldots, u_9$ les arguments elliptiques de ces nœuds; l'expression Su étendue aux 9 nœuds doit être une partie aliquote (soit $\lambda^{\text{ième}}$) d'une période, et l'on aura $p = 3\lambda$. Puis, par une discussion algébrique approfondie, ainsi que par l'étude de l'équation au voisinage des nœuds, l'auteur montre qu'on a nécessairement $\lambda = 1$; le faisceau $f + C\varphi$ se réduit à un faisceau de cubiques, et l'équation est ainsi intégrée algébriquement. Mais ce résultat a exigé l'application du théorème d'Abel; les méthodes de Géométrie énumérative usitées dans la première Partie n'auraient pas suffi pour l'obtenir.

Troisième Partie (219-239). — *Introduction des fonctions fuchsiennes.* — Dans le voisinage du point $(x_0 : z_0, y_0 : z_0)$ l'intégrale générale peut se mettre sous la forme $f_1 : \varphi_1 = \text{const.}$, avec $f_1 = z^{-p} f$, et $\varphi_1 = z^{-p}\varphi$. Si le point est un nœud dicritique l'intégrale peut aussi s'écrire $X_1 : X_2 = \text{const.}$: donc $f_1 : \varphi_1$ est une fonction de $X_1 : X_2$, et, par suite, ne change pas quand on multiplie X_1 et X_2 par une constante k; on en déduit, en ordonnant par groupes homogènes,

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{k^\lambda f_1^\lambda + \ldots}{k^\lambda \varphi_1^\lambda + \ldots},$$

d'où, faisant tendre k vers 0,

$$\frac{f}{\varphi} = \frac{f_1^\lambda}{\varphi_1^\lambda},$$

ainsi $f : \varphi$ est le quotient de deux polynomes en X_1, X_2, homogènes et d'ordre λ. Moyennant quelques modifications, cette conclusion s'étend à tous les nœuds. Par contre, dans le cas d'un col, on a $f : \varphi = f_1^p : \varphi_1^p$, f_1 et φ_1 étant des *séries* en X_1, X_2. En définitive, nous sommes conduits à aborder le problème par la méthode suivante : soient X_2^i et X_1^i les séries associées aux nœuds M_i $(i = 1 \text{ et } 2)$; posons

$$Z_i = \frac{(X_1)^{\mu_i}}{(X_1^i)^{\nu_i}} \qquad (i = 1, 2)$$

($\mu_i = 1 = \nu_i$ pour un nœud dicritique); pour que l'intégration algébrique soit possible, il faut qu'une fonction rationnelle de Z_1 coïncide avec une fonction rationnelle de Z_2, la valeur commune de ces fonctions étant justement $f : \varphi$: mais la méthode du prolongement analytique ne nous permettra pas de conclure au bout d'un nombre fini d'opérations.

C'est ici que M. H. Poincaré introduit les fonctions fuchsiennes. Considérons d'abord le cas d'un nœud dicritique et supposons que l'on connaisse les valeurs remarquables $C_1, \ldots, C_q$, les nombres $\lambda, \ldots, \lambda_i, \ldots, \alpha_i, \ldots$ relatifs au nœud. Appelons M_k un multiple commun des α_i (correspondant à la valeur C_k) et formons le polygone fuchsien R_0 de la première famille et du premier genre, présentant $2q - 2$ sommets répartis en q cycles, le premier et le dernier formés chacun d'un seul sommet (A_1 et A_q), les autres en comprenant chacun deux. La somme des angles au $k^{\text{ième}}$ cycle sera $2\pi : M_k$ et il y aura une fonction fuchsienne $F(\zeta)$ prenant la valeur C_k au point A_k: posons $F(\zeta) = -f : \varphi$. M. H. Poincaré montre que X est une fonction fuchsienne de ζ. Puis, formant

le polygone fuchsien S_0 en associant convenablement λ polygones $R_0, \ldots, R_{\lambda-1}$ congruents à R_0, l'auteur montre que le genre de S_0 est nul, et que le nombre de ses côtés est $2\lambda(q-2)+2$. Ce polygone, dont l'existence est assurée, ne peut être construit que d'un nombre fini de manières. M. H. Poincaré étend cette conclusion à tous les nœuds; puis il termine en étudiant le groupe fuchsien Γ obtenu de la façon suivante : soient G et g les groupes fuchsiens engendrés par R_0 et S_0; le groupe g est un sous-groupe de G, d'indice λ. A chacun des nœuds correspond un groupe g; Γ sera le groupe formé par les substitutions communes à tous les sous-groupes g. Supposons, par exemple, que le polygone V_0 correspondant à Γ est de genre 0; il existe une fonction fuchsienne ξ telle que les Z_i et $f_i \xi$ soient fonctions rationnelles de ξ.

Fano (*G.*). — Un théorème sur les surfaces algébriques avec une infinité de transformations projectives en elles-mêmes (240-246).

Dans une Note antérieure (même recueil, t. X, p. 1 et suiv.), l'auteur avait caractérisé les surfaces algébriques admettant un groupe continu transitif de transformations projectives en elles-mêmes. M. Gino Fano revient sur cette question et détermine effectivement les surfaces algébriques Φ d'un espace quelconque admettant un groupe continu de transformations projectives en elles-mêmes.

S'appuyant sur ses propres résultats et sur ceux de S. Lie, et procédant par récurrence, il établit le théorème suivant :

Les seules surfaces algébriques d'un espace quelconque, qui admettent un groupe continu primitif de transformations projectives, sont les surfaces d'ordre n^2 appartenant à un espace $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$, et qui peuvent se représenter sur le plan de telle façon qu'à leurs sections hyperplanes correspondent les courbes d'ordre n.

Petrovitch (*M.*). — Quelques formules générales relatives au calcul des intégrales définies (247-259).

En séparant la partie réelle et la partie imaginaire d'une série de Taylor, l'auteur obtient, par multiplication et intégration, des formules utiles dans le calcul des intégrales définies. Donnons, par exemple, la formule

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin z}{1-2x\cos z+x^2} \operatorname{arc\,tang} \frac{x \sin z}{1+x\cos z}\, dz = \pi \log(x+1).$$

Il termine par des applications aux fonctions Ξ d'une variable.

Burali-Forti (*C.*). — Sur les classes bien ordonnées (260).

Voir l'analyse de sa Note dans ce Tome, p. 127.

Tome XII, 1898. (1re Partie : *Memorie e Communicazioni.*)

Vivanti (*G.*). — Sur les transformations infinitésimales qui laissent invariante une équation de Pfaff (1-20).

Considérons l'équation de Pfaff

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} U_i \, dx_i = 0$$

et la transformation infinitésimale

$$X f = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i};$$

M. Vivanti se propose de rechercher toutes les transformations X qui conservent (1). A cet effet, posons

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_h} - \frac{\partial U_h}{\partial x_i} = V_{ih}, \qquad \sum_{h=1}^{n} \xi_h U_h = W, \qquad \frac{\partial W}{\partial x_i} = W_i;$$

les ξ_i doivent satisfaire au système

$$\sum_{h=1}^{n} V_{ih} \xi_h = \rho U_i - W_i,$$

où ρ est une fonction à déterminer ultérieurement. Le problème revient à la discussion de ce système linéaire; or son déterminant Δ est symétrique gauche, ce qui conduit l'auteur à approfondir la théorie de ces déterminants. Puis il envisage successivement deux cas, suivant la parité de n; lorsque n est pair, W doit satisfaire à une équation linéaire aux dérivées partielles; cette équation une fois intégrée, on en déduit aisément X, au moyen de formules qui contiennent (pour $\Delta \neq 0$) la fonction arbitraire ρ. Lorsque n est impair, W peut être prise arbitrairement et la transformation X s'obtient immédiatement sous forme explicite. Enfin, dans ce dernier cas, l'auteur vérifie directement ses résultats, et il recherche quelle est la fonction W correspondant à la transformation $(X_1 X_2) f$, où X_1 et X_2 sont définies au moyen des deux fonctions W_1 et W_2.

Gegenbauer (*L.*). — Généralisation de quelques relations contenues dans la Note du professeur Morera *Sur les polynomes de Legendre* (21-22).

L'auteur étend des formules données par M. Morera [1] aux fonctions $C_n^\nu(x)$ définies par l'équation

$$(1 - 2\alpha x + x^2)^{-\nu} = \sum_{\lambda=0}^{+\infty} C_\lambda^\nu(x)\,\alpha^\lambda.$$

Gerbaldi (*F.*). — Sur le groupe simple de 360 collinéations planes (1re Partie) (23-94).

Le groupe G de 360 collinéations planes, étudié par H. Valentiner et A. Wiman, peut être défini très simplement au moyen d'un système remarquable S de six coniques : ce système avait été trouvé par l'auteur avant la découverte de G. Le Mémoire de M. Gerbaldi a précisément pour objet de rattacher l'étude de G et de ses sous-groupes à celle de S; il doit être suivi d'une seconde Partie relative à la réduction de l'équation du sixième degré.

Considérons le système S formé par les six coniques suivantes :

$$\begin{aligned}
&(1)\quad x_1^2 + \varepsilon x_2^2 + \varepsilon^2 x_3^2 = 0, \\
&(2)\quad x_1^2 + \varepsilon^2 x_2^2 + \varepsilon x_3^2 = 0, \\
&(3)\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2k(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) = 0, \\
&(4)\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2k(x_2x_3 - x_3x_1 - x_1x_2) = 0, \\
&(5)\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2k(-x_2x_3 + x_3x_1 - x_1x_2) = 0, \\
&(6)\quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2k(-x_2x_3 - x_3x_1 + x_1x_2) = 0.
\end{aligned}
\qquad
\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad k = \frac{-3 + i\sqrt{15}}{4},$$

Deux quelconques des six coniques précédentes ont leurs invariants simultanés identiquement nuls; on dit qu'elles forment un système en involution, ou *sextuple de coniques*. Appelons $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta$ une permutation quelconque des six chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6; il y a une homologie harmonique, soit $O_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$, qui produit sur les six coniques les permutations $(\alpha\beta)$ et $(\gamma\delta)$. De même, on définit une collinéation cyclique, d'ordre 3, soit $S_{(\alpha\beta\gamma)}$ qui permute cycliquement $\alpha\beta\gamma$ et conserve δ, ε et ζ. Écrivons

$$O_{(34)(56)} = O, \qquad S_{(456)} = S, \qquad S_{(123)} = T, \qquad Z = OT^2OTS$$

Le groupe G, d'ordre 360, engendré par les substitutions précédentes est le groupe de collinéations le plus général qui conserve S; il est holoédriquement isomorphe au groupe alterne de permutations de six lettres, et peut être défini à partir de T et Z comme substitutions fondamentales. Pour en simplifier l'étude, l'auteur fait le changement de coordonnées

$$x_1 = x + y + cz, \quad x_2 = \varepsilon x + \varepsilon^2 y + cz, \quad x_3 = \varepsilon^2 x + \varepsilon y + cz \quad (c = 1 + k);$$

les équations des six coniques deviennent $f_i = 0$. Appelons $T_{\alpha\beta}$ la conique par rapport à laquelle S_α et S_β sont polaires réciproques, et remarquons qu'il existe encore un sextuple S′ (et un seul) distinct de S et invariant par les transformations de G. Nous désignerons par $f'_i = 0$ les équations des coniques de S′ et

---

[1] *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XI, 1897, p. 176-180.

par T′ le système des coniques $T'_{\alpha\beta}$ jouant pour S′ le même rôle que les coniques $T_{\alpha\beta}$ pour S.

Tout ceci établi, l'auteur envisage successivement : 1° les 45 homologies $O_{(\alpha\beta)(\gamma\delta)}$; 2° les 80 collinéations $S_{(\alpha\beta\gamma)}$ et $S_{(\alpha\beta\gamma)(\delta\varepsilon\zeta)}$ dont les dernières permutent cycliquement chacun des groupes $\alpha\beta\gamma$ et $\delta\varepsilon\zeta$; 3° les 90 collinéations $Y_{(\alpha\beta\gamma\delta)}$ qui produisent les permutations circulaires $(\alpha\beta\gamma\delta)$ et $(\varepsilon\zeta)$; 4° les 144 collinéations $Z_{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)}$ qui effectuent la permutation circulaire $(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)$. Dans chaque cas, l'auteur calcule les valeurs prises par les formes f_i et f'_i aux points remarquables des substitutions : elles permettent d'approfondir l'étude de G. Associons à un point du plan tous ses transformés par G; on obtient ainsi un ensemble de m points. En général $m = 360$; pour certaines positions du point, ce nombre s'abaisse et l'on a $m = 360 : n$. On a ainsi des *pôles* d'ordre n, n pouvant prendre les valeurs 2, 4, 5, 6, 8, 10; on définit, de même, des axes d'ordre n.

Le Mémoire se termine par l'étude de la configuration formée par les éléments définis plus haut, ainsi que par l'énumération des sous-groupes de G : ces sous-groupes (y compris G) sont au nombre de 500 et se répartissent en plusieurs catégories : groupes cycliques et diédriques d'ordres μ et 2μ ($\mu = 2, 3, 4, 5$); groupes hessiens d'ordre 9, 18, 36, groupes tétraédriques, octaédriques et icosaédriques.

Viterbi (*A.*). — Sur le prolongement analytique des fonctions monogènes uniformes représentables par la méthode de Mittag-Leffler (95-110).

Considérons une fonction $f(x)$, holomorphe en tous les points d'un continuum C et présentant des singularités (essentielles ou non) aux divers points de la frontière R du continuum; imaginons cette fonction développée suivant la méthode classique de M. Mittag-Leffler et faisons varier les ensembles C et R qui deviendront $\overline{C}$ et $\overline{R}$. M. Viterbi recherche sous quelles conditions on peut construire une fonction analytique uniforme qui représente, pour les nouveaux ensembles $\overline{C}$ et $\overline{R}$, le prolongement analytique de la première (ou, plus exactement, n'en diffère que par une fonction analytique uniforme, holomorphe en tous les points de $\overline{C}$).

Burali-Forti (*C.*). — Sur quelques questions de Géométrie différentielle (111-132).

Cette Note a pour but d'exposer, suivant les notations de H. Grassmann, tout le programme de Géométrie infinitésimale des cours de licence. L'emploi des notations vectorielles permet de condenser les formules d'une façon très élégante.

Weber (*E. von*). — Sur les transformations infinitésimales qui laissent invariante une équation de Pfaff (133-140).

L'auteur reprend le problème traité par M. G. Vivanti au début de ce Tome

Le géomètre italien avait employé une méthode synthétique directe, reposant sur la théorie des déterminants symétriques gauches. M. von Weber retrouve les mêmes résultats; en outre, il obtient des formules valables quel que soit le rang du déterminant Δ; mais, pour cela, il doit s'appuyer sur les travaux de Clebsch, Frobenius, Engel, et notamment sur la théorie de la réduction des expressions de Pfaff.

Monaco-Aprile (*L. lo*). — Sur une courbe gauche, lieu de certains points paraboliques d'un réseau de surfaces, général, et de l'ordre n (141-162).

Soit [F] un réseau linéaire de surfaces algebriques d'ordre n; le lieu des points doubles des surfaces de ce réseau est une courbe gauche J, dite *la jacobienne du réseau;* son ordre est $6(n-1)^2$, et M. Guccia, dans son cours lithographié de Palerme de l'année 1895-1896, en a donné divers modes de génération, comme le rappelle l'auteur. A toute droite E faisons correspondre la surface Ξ_E, d'ordre $3n-2$, lieu des points de contact des plans tangents aux surfaces de [F] menés par E; l'auteur étudie l'allure des surfaces Ξ_E dans le voisinage des points-base du réseau. Puis, il considère le réseau [Ξ] correspondant à l'ensemble des droites d'une gerbe [E] de centre P; soit Σ_E sa jacobienne; elle possède les propriétés suivantes : 1° c'est le lieu des points de contact des plans tangents menés par chaque rayon de [E] à la surface Ξ_F correspondante; 2° c'est le lieu des points q répondant aux conditions que voici : q est parabolique pour une surface F; le plan tangent à F en q passe par P et la droite osculatrice à F en q est tangente à toutes les surfaces F passant par q.

Franchis (*M. de*). — Sur la réduction des intégrales étendues à des variétés (163-187).

Ce travail a pour but de transformer une intégrale étendue à une variété V_p, fermée, à p dimensions et appartenant à un espace $S_n (n > p)$ en une intégrale étendue à une variété à $p+1$ dimensions qui admet V_p comme frontière. La formule obtenue généralise celles de Riemann et de Stokes; elle comprend comme cas particuliers les formules de Betti ($n = p-1$) et celles où l'on a $p = 1$; elle permet enfin de retrouver les *conditions d'intégrabilité* données par M. H. Poincaré dans son Mémoire sur les résidus des intégrales doubles.

L'auteur débute en rappelant des définitions et des théorèmes d'*Analysis situs;* il étudie les variétés au moyen de représentations paramétriques. Cette méthode introduit des déterminants fonctionnels dans les intégrales proposées : les propriétés de ces déterminants et l'intégration sous le signe $\int$ fournissent, moyennant quelques transformations, la formule cherchée. Le travail se termine par l'étude des conditions d'intégrabilité pour les variétés appartenant à un domaine représentable point par point et avec continuité sur l'intérieur d'un parallélépipède.

Medolaghi (*P.*). — Sur les groupes isomorphes au groupe de toutes les transformations à une variable (188-209).

Le plus simple de tous les groupes infinis est celui qui est formé par toutes

les transformations à une variable; soit $\xi(x)\frac{\partial f}{\partial x}$ le symbole de ce groupe. L'auteur se propose d'étudier les groupes à un nombre quelconque de variables qui lui sont isomorphes. Moyennant des changements de variables simples il obtient, pour les transformations infinitésimales de ces groupes, les expressions suivantes :

$$\xi p_1 + \xi' p_2, \quad \xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3, \quad \xi p_1 - \xi' x_2 p_2 + \xi'' p_2$$

et

$$\xi p_1 + \xi' x_2 p_2 + \xi'' x_2 p_3 + \sum_{i=3}^{s} \xi^{(i)} X_i,$$

avec $\xi^{(i)} = \frac{d^i}{dx^i}\xi(x_1)$, $p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, et le symbole X_i pouvant recevoir cinq formes canoniques différentes. M. Medolaghi se borne à étudier les deux premières qui sont $x_2^{s-1} p_3$ et $x_2^{s-1}(x_2 p_2 + x_3 p_3)$; cette recherche lui fournit notamment tous les groupes de l'espace ordinaire isomorphes au groupe du début. Quant aux groupes des trois dernières catégories, leur étude détaillée doit faire l'objet d'un Mémoire ultérieur.

Burgatti (*P.*). — Sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes (210-221).

L'auteur retrouve les diverses méthodes employées pour l'intégration des équations aux dérivées partielles à deux variables; il montre qu'on peut les considérer comme résultant de l'application d'un même artifice : la recherche d'un facteur intégrant. Ce point de départ lui permet de rattacher ensemble les méthodes de Lagrange, de Monge-Ampère et de M. Darboux. Ainsi, pour la première de ces méthodes, écrivons l'équation sous la forme

$$(1) \qquad F = p + f(x, y, z, q) = 0$$

et cherchons à réaliser l'identité

$$(2) \qquad \rho\left(\frac{dF}{dy}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dv}{dy}\right) - \left(\frac{du}{dy}\right)\left(\frac{dv}{dx}\right),$$

où ρ, u, v sont des fonctions inconnues de x, y, z, q et où les symboles entre parenthèses indiquent des dérivations totales par rapport à y et à x. Si cette identité est vérifiée, toutes les intégrales de (1) seront des intégrales de $u = \psi(v)$ où ψ est une fonction arbitraire. Or, en écrivant que (2) est vérifiée, on retombe sur les équations des caractéristiques; et, d'autre part, l'équation $u = \psi(v)$ formant avec (1) un système complètement intégrable, on retrouve les intégrales générales de la théorie classique.

Enriques (*F.*). — Sur les hypothèses qui permettent l'introduction des coordonnées dans une variété à plusieurs dimensions (222-239).

Le Mémoire de M. Enriques a pour but d'élucider une question d'*Analysis*

situs que les géomètres avaient jusqu'alors négligée : la discussion rigoureuse des postulats qui permettent l'introduction des coordonnées dans une variété à n dimensions. M. Enriques se limite, d'ailleurs, au cas de $n = 2$; mais, comme il le montre lui-même, l'extension de ses résultats ne comporte aucune difficulté. Sa méthode repose essentiellement sur deux définitions et un postulat.

Nous appellerons variété v_1 à une dimension (ou ligne), une classe d'éléments à laquelle appartiennent deux ordres continus, sans éléments extrêmes et inverses l'un de l'autre. Définissons encore les variétés v_2 à deux dimensions : nous appellerons ainsi une classe d'éléments qui contient deux systèmes de variétés v_1, a et b, satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Tout élément de v_2 appartient à une variété a et à une variété b.

2° Deux variétés a et b ont toujours en commun un élément (dans lequel elles se rencontrent).

3° Si a_1 et a_2 sont deux variétés du premier système, et si l'on considère plusieurs éléments consécutifs de a_1 et les variétés b qui les contiennent, ces dernières rencontrent a_2 suivant autant d'éléments consécutifs ; et *vice versa* pour les variétés b. On dit alors que les variétés a et b forment deux faisceaux.

Les deux définitions précédentes permettent déjà de démontrer divers théorèmes sur les variétés à deux dimensions ; mais ils ne suffisent pas pour en établir des représentations planes. Pour obtenir ce résultat, il suffit de s'appuyer sur le postulat suivant :

« Sur la variété v_2, il existe un troisième faisceau c de variétés v_1, distinct des deux premiers a et b. »

Considérons alors les lignes a et c qui passent par un point quelconque d'une ligne (variable) b ; elles coupent une ligne (fixe) b_0 en deux points P et P_1, d'où une correspondance $[PP_1]$ variable avec b et qui joue un rôle capital dans la méthode de M. Enriques. L'étude de cette correspondance lui permet d'établir notamment le théorème suivant : *Soient sur b_0 quatre points situés dans l'ordre* PABM ; *on peut construire, quel que soit n, $n-1$ points appartenant au segment* PM *et tels qu'on ait*

$$[PM_1] = [M_1M_2] = \ldots = [M_{n-1}M].$$

De plus, il est toujours possible de trouver un entier m tel que, pour $n > m$, l'un des points M_i soit à l'intérieur de AB.

Ce théorème et ses corollaires conduisent alors sans peine à la représentation paramétrique cherchée.

Cordone (*G.*). — Sur un problème fondamental de la théorie des fractions continues algébriques généralisées (240-257).

L'auteur s'est proposé le problème suivant : « Étant données n séries $S_1, \ldots, S_n$ de la forme

$$S_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s_{ir}}{x^r},$$

déterminer par récurrence n polynomes en x, $P_1^m, \ldots, P_n^m$, de degrés $p_1, \ldots, p_n^m$,

et tels que l'expression $\sum_{i=1}^{n} S_i P_i^m$ commence par un terme de degré

$$p_1^m + \ldots + p_n^m - p + n$$

en x^{-1}, p étant le plus grand des entiers $p_1^m, \ldots, p_n^m$. » Les relations de récurrence doivent être de la forme

$$P_i^{m+n} = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_m^j(x) P_i^{m+j};$$

elles généralisent évidemment celles de la théorie des fractions continues.

La difficulté du problème réside essentiellement dans la détermination des degrés des polynomes $\alpha_m^j(x)$ et P_i^{m+n}; à cet égard, l'auteur énonce le résultat suivant : il existe $n-1$ algorithmes possibles; l'un quelconque d'entre eux s'obtient en laissant fixes les degrés de $n-l$ des $n-1$ polynomes $P_1, \ldots, P_{n-1}$, et en augmentant alternativement et successivement les degrés des polynomes restants. Suivant la valeur de l, un Tableau indique le degre en x des polynomes $\alpha_m^j(x)$, degré qui ne peut dépasser l'unité. Pour la démonstration, l'auteur se borne au cas de $n = 3$.

Berzolari (*L.*). — Sur les transvectants formés avec les puissances d'une forme binaire quadratique (258-259).

Dans un Mémoire des *Mathematische Annalen* (t. XXXI, p. 568-569), M. Gordan avait donné l'expression du deuxième transvectant formé avec deux puissances F^λ et F^μ d'une forme quadratique F, de discriminant A; il n'avait pas indiqué l'expression du transvectant d'ordre 2ρ qui est, comme le montre M. Berzolari,

$$(F^\lambda, F^\mu)^{2\rho} = 2^{2\rho} \frac{\binom{\lambda}{\rho}\binom{\mu}{\rho}\binom{\lambda+\mu-\rho}{\rho}}{\binom{2\lambda}{2\rho}\binom{2\mu}{2\rho}\binom{2\rho}{\rho}} A^\rho F^{\lambda+\mu-2\rho}.$$

Bucca (*F.*). — Sur certaines intégrales et certains développements en séries (260-277).

L'auteur étudie l'intégrale $\int_c F(x, z)\, dx$ où F est holomorphe en z lorsque, x variant sur le contour fermé c, z appartient à une aire connexe E, et où F est intégrable par rapport à x lorsque z prend une valeur quelconque de E. Il démontre que c'est une fonction de z, holomorphe dans E, et dont on obtient la dérivée en appliquant la règle de différentiation sous le signe $\int$. A l'aide de ce théorème, il étudie le développement d'une fonction holomorphe en série de fonctions holomorphes, la convergence ayant lieu soit à l'intérieur, soit à l'extérieur d'une aire donnée. Puis il compare ses résultats à ceux de Weierstrass et termine par des applications de la formule donnée par M. Painlevé pour représenter une fonction en série de polynomes.

Guidice (*F.*). — Introduction aux coordonnées triangulaires et tétraédriques (278-306).

Ce travail contient l'exposé des principales relations métriques relatives aux coordonnées trilinéaires et tétraédriques; il laisse de côté les relations angulaires. L'auteur envisage le cas des coordonnées de droites et de plans; il généralise la relation de Stewart et fait des applications au cercle, à la sphère, au triangle (et au tétraèdre) pédal d'un point donné.

Puglisi (*M.*). — Sur le mouvement d'un point pesant sur une surface de révolution (312-321).

La Note a pour but de simplifier, par des changements de variables, la démonstration d'un théorème dû à O. Staude (*Acta mathematica*, Bd XI).

Perna (*A.*). — L'imaginaire i et les nombres alternants i, j, k dans l'étude de la déformation infinitésimale des courbes planes et des courbes gauches (322-325).

M. Perna applique les imaginaires et le calcul symbolique de H. Grassmann pour obtenir rapidement et sous forme condensée les formules de la déformation infiniment petite des courbes planes et gauches; il prend comme point de départ des relations dues à Cesàro.

Gordan (*P.*). — Extrait d'une lettre à M. L. Berzolari (326-328).

Dans sa Note analysée plus haut, M. L. Berzolari s'était appuyé sur la formule

$$\sum_{i=0}^{2\rho} (-1)^i \binom{2\rho}{i} \frac{1}{(\lambda-i)!(\mu-i)!(\lambda-2\rho+i)!(\mu-2\rho+i)!}$$
$$= \frac{(-1)^\rho \binom{\lambda+\mu-\rho}{\rho}(2\rho)!}{\lambda!\mu!(\lambda-\rho)!(\mu-\rho)!},$$

en se bornant à dire qu'on peut la vérifier par récurrence. M. Gordan en donne une démonstration directe basée sur l'introduction de variables auxiliaires.

René Garnier.

ATTI DEL R. ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI [1].

T. LX (t. III de la 8e série), 1900-1901.

Zanon (*G.-A.*). — [S 4 *b*] Cas particuliers de la condensation de la vapeur avec augmentation d'énergie (43-51).

Lorenzoni (*G.*). — [U] Sur les librations apparentes de la Lune. Notes et éclaircissements historiques (91-140).

Dell'Agnola (*C.-A.*). — [D 1 *b* ref. D 4] Sur les séries de polynomes (171-180).

Antoniazzi (*A.*). — [U] Passage des bords de la Lune et positions du cratère Mœssing A, observés au cercle méridien de Padoue en 1897 et 1898 ([1]-[54]).

Picciati (*G.*). — [R 1 *e*] La fonction de Weierstrass dans la cinématique du quadrilatère articulé (301-309).

M. Darboux avait trouvé les expressions des fonctions trigonométriques des angles du quadrilatère au moyen des fonctions elliptiques. L'auteur trouve ces mêmes expressions au moyen de la fonction $\wp$ et de sa dérivée.

Favaro (*A.*). — [V 7] Sur les lunettes construites et employées par Galilée (317-342, 2 planches).

Palatini (*F.*). — [N_1 1 ref. Q 2] Sur les systèmes linéaires de complexes linéaires de droites dans l'espace de cinq dimensions (371-383).

Solution du problème suivant : *Étant donné en* S_5 *un système linéaire de complexe dans lequel il y ait* ∞^k *complexes doués de droite centrale, trouver le nombre de droites centrales satisfaisant à un groupe quelconque de conditions* caractéristiques (dans le sens de Schubert), *la dimension de ce groupe étant égale à la dimension du système formé par ces droites.*

Favaro (*A.*). — [V 7] Sur l'apparence de Saturne observée par Galilée en août de 1616 (415-432).

Boggio (*T.*). — [H 10 *d* α] Sur certaines fonctions harmoniques

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, 1906, 2e Partie, p. 174-179.

ou biharmoniques dans un champ elliptique ou ellipsoïdique (433-442).

L'auteur construit une fonction harmonique dans une aire elliptique σ, prenant au contour les valeurs d'un polynome donné de degré n. En supposant

$$v = \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\lambda(x, y),$$

et en déterminant les coefficients de λ au moyen de la condition

$$\Delta^2 v = P(x, y),$$

il obtient d'abord une fonction v prenant au contour la valeur zéro et dans l'aire elliptique les valeurs du polynome $P(x, y)$; puis, en posant

$$u = Q - v,$$

et en déterminant v comme dans le cas précédent, il obtient la fonction u cherchée, qui est aussi un polynome de degré n. Après, il résout le même problème pour une aire σ' représentable conformément sur l'aire elliptique σ au moyen de polynomes. Les courbes limitant ces aires σ' sont des épicycloïdes allongées.

Il vient ensuite à déterminer la fonction v, régulière en σ et satisfaisant aux équations

$$\Delta^2 \Delta^2 v = P;$$

dans σ on a

$$v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0$$

au contour. Une telle fonction est un polynome du degré $n + 4$. Ces résultats sont ensuite étendus au cas de trois variables (champ ellipsoïdique).

Puis il étudie la déformation d'une membrane elliptique isotrope, ensuite celle d'un ellipsoïde élastique isotrope, en supposant que des forces agissent au contour et que les composantes du déplacement prennent au contour les valeurs de deux (ou, respectivement, de trois) polynomes donnés.

Malipiero (*A.*). — [R 8 *g*] Sur les transformations de la Dynamique (469-485).

Étant donnés deux systèmes dynamiques à liaisons indépendantes du temps et avec même degré de liberté, et soumis à des forces indépendantes des vitesses, établir une transformation de variables au moyen de laquelle les $n - 1$ intégrales du premier système (trajectoires) coïncident avec ceux du second. Ce problème qui revient à la représentation avec conservation des géodésiques, a été traité par MM. Appell (*Crelle*, t. 109, 1892), Painlevé (*Journal de Liouville*, 5e série, t. X, 1894) et Levi-Civita (*Annali di Matematica*, serie 2a, t. XXIV, 1896). L'auteur traite le cas où l'on suppose que les deux systèmes ne doivent pas avoir *toutes* les trajectoires en commun, mais seulement une famille de $\infty^{2(n-1)-k}$ trajectoires. Dans le cas des forces nulles, le problème équivaut au suivant :

Déterminer toutes les variétés V_n *représentables uniquement sur une* V_n *de manière qu'une famille de* $\infty^{2(n-1)-k}$ *géodésiques de* V_n *ait pour image une famille de* $\infty^{2(n-1)-k}$ *de celles de* V_n. Le cas considéré par l'auteur est celui de $k = 1$. Il trouve les équations différentielles qui lient les coefficients des expressions des forces vives des deux systèmes (c'est-à-dire aussi les coefficients des expressions de l'élément linéaire de V_n et de V'_n), et donne à ces équations une forme invariantive au moyen de la dérivation covariante de M. Ricci.

Fubini (*G.*). — [Q 1 *c* ref. N_2] Sur une classe remarquable de surfaces dans l'espace elliptique (561-565).

Surfaces pour lesquelles il existe un plan par rapport auquel les lignes d'équidistance forment un système isotherme. La détermination de ces surfaces conduit aussi à une propriété remarquable des *congruences d'Appell* dans l'espace euclidien.

Cipolla (*F.*). — [V 1] Sur la quantité infinitésimale et sur le zéro mathématique. Pensées (567-573).

Boggio (*T.*). — [H 10 *d* α] Intégration de l'équation $\Delta^2\Delta^2 = 0$ dans une aire elliptique (591-609).

Levi-Civita (*T.*). — [U 4] Sur la forme du développement de la fonction perturbatrice (653-661).

Détermination *a priori* des caractères analytiques du développement.

Dall'Acqua (*A.-F.*). — [N_2 1 ref. O 6 *k*] Sur certaines déformations des congruences normales (663-672).

Une congruence de rayons est supposée en correspondance univoque avec les points d'une surface, et tout rayon de la congruence invariablement lié au plan tangent de la surface au point correspondant. Alors à une flexion de la surface correspond une déformation de la congruence. L'auteur détermine les conditions sous lesquelles la congruence étant normale reste normale pour toute flexion de la surface. Lorsqu'on suppose que les déformées des surfaces orthogonales aux rayons restent normales après la déformation, les seuls cas possibles sont le cas de Beltrami (tout rayon passe par le point correspondant) et celui de Ribaucour (tout rayon est situé dans le plan tangent au point correspondant). Mais, lorsqu'on suppose seulement que la congruence reste normale après la déformation, il y a d'autres cas que l'auteur étudie dans cette Note. Ce sont les cas des surfaces applicables sur des surfaces de rotation, c'est-à-dire dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = dx_1^2 + E(x_1)\,dx_2^2.$$

Si la surface est aussi à courbure constante, on a aussi d'autres solutions qui dépendent de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre et d'une du premier. Si la surface est développable, les solutions s'expriment toutes par une fonction harmonique arbitraire. Le cas où tout rayon est parallèle au plan tangent au point correspondant est traité séparément dans un Mémoire analysé ci-dessous.

Razzaboni (*A.*). — [O3] Un théorème de M. Demartres généralisé (757-768).

Ce théorème est dans les *Comptes rendus* de 1888 (n° 15) et donne une construction pour déduire d'une courbe de Bertrand un nombre infini de ces courbes.

Kantor (*S.*). — [$M_1 b$ ref. $P_4 g$] Une nouvelle interprétation des formules de Plücker et de Veronese et d'autres formules de Géométrie (769-773).

Étant x, y, z l'ordre, le nombre des points doubles et celui des rebroussements; x', y', z' la classe, le nombre des tangentes doubles et celui des inflexions, l'auteur interprète les formules de Plücker comme une transformation des variables x, y, z en x', y', z'. Cette transformation est birationnelle et involutive, et le système homaloïdique de la transformation est constitué par des surfaces F^4. Propriétés de cette transformation. La quadrique

$$(x-1)(x-2)-2y-2z=0$$

est changée en elle-même (le premier membre est le double du *genre*).

Observations analogues pour les formules de Cayley relatives aux courbes gauches.

Indication d'une généralisation qu'on peut faire relativement aux formules de Veronese pour les courbes de S_r et aux formules de Salmon pour les surfaces de S_3 et à celles de Schubert pour les surfaces de S_r.

Dall' Acqua (*A.-F.*). — [N_2 1 ref. O6k] Sur un cas de déformation des congruences normales (921-923).

Cette Note vient compléter celle de la page 663. L'auteur traite le cas où tout rayon est parallèle au plan tangent au point correspondant. La surface est encore applicable sur une surface de rotation; et, sur les méridiens de cette surface est applicable la congruence enveloppée par les parallèles aux rayons de la congruence menées par les points correspondants de la surface. Ces parallèles aussi forment une congruence normale.

Enriques (*F.*). — [R5a] Sur la seconde solution de Laplace du problème des trois corps (957-959).

Extrait d'une lettre à M. Levi-Civita.

T. LXI, 1901-1902.

Cattaneo (*P.*). — [$N_2 3$] Sur les congruences de lignes dans un espace plan de trois dimensions (41-50).

I. Expression des courbures des lignes d'une congruence. Conditions pour que la congruence soit formée par des droites ou par des lignes planes ou par des cercles.

En considérant sur un plan une congruence de lignes et en faisant tourner le plan autour d'une de ses droites, les congruences qu'on obtient ainsi sont les seules qui, avec les directions principales relatives à tout point de l'espace, déterminent un système triple orthogonal de surfaces.

II. Application des résultats précédents à l'étude des trajectoires orthogonales des familles de plans ou de sphères.

La méthode de recherche est le *Calcul différentiel absolu* de M. Ricci.

Antoniazzi (*A.*). — [U] Observations de planètes et de comètes, faites en 1899 et 1900. Contributions de l'Observatoire astronomique de l'Université royale de Padoue ([1]-[58]).

Lorenzoni (*G.*). — [U] Observations d'occultations et d'éclipses. Contributions de l'Observatoire astronomique de l'Université royale de Padoue ([59]-[86]).

Arcais (*F. d'*). — [H 2 *a*] Sur une démonstration de l'unicité des intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre (351-355).

La démonstration donnée par l'auteur dans son *Corso di Analisi infinitesimale* est celle de M. Peano, qui emploie la propriété que si $u(x)$ a une dérivée $u'(x)$, la valeur absolue $|u(x)|$ a aussi une dérivée $|u(x)|'$ et l'on a toujours $|u(x)|' \leqq u'(x)$. Cette propriété, suivant une observation de M. Bianchi, peut ne pas avoir lieu. Par cela l'auteur modifie ici la démonstration de manière à éviter cette objection.

Rossi (*L.-V.*). — [T 2 *a*] A propos des expériences de M. L. Hartmann sur la distribution des déformations dans les métaux soumis à des efforts (357-378).

Bordiga (*G.*). — [K 22 *a*] Les méthodes de la Géométrie descriptive (389-403), (609-618, une planche).

Les méthodes de représentation de l'espace sur un plan peuvent se distinguer de la manière suivante :

1° Représentation au moyen de couples de points;

2° De couples de droites;

3° De groupes de trois points;

4° De groupes de trois droites.

De la première l'auteur déduit la projection stéréoscopique, les plans cotés et les projections orthogonales. De la deuxième, la projection centrale, de la troisième l'axonométrie et de la quatrième les projections tricentriques.

Picciati (*G.*). — [R8*c*] Sur les mouvements stationnaires de systèmes holonomes soumis à des forces conservatives dans des cas particuliers (405-417).

I. Mouvement d'un point sur une surface de rotation, lorsqu'il existe un potentiel ayant une valeur constante sur les parallèles.

II. Mouvement d'un point libre soumis à une force conservative pour laquelle existe une intégrale des aires.

III. Mouvement d'un solide de rotation pesant sur un plan horizontal fixe sur lequel il glisse sans frottement.

L'auteur emploie la règle donnée par M. Levi-Civita dans les *Rendiconti dei Lincei*, 1901, 1er semestre.

Viterbi (*A.*). — [S2*c*] Sur une classe de mouvements tourbillonnaires permanents (449-464).

Mouvements dans lesquels la congruence des lignes de courant et celle des lignes tourbillonnaires (dont les tangentes sont les axes de rotation des particules fluides) sont des congruences normales. Les cas possibles se réduisent à deux. Dans l'un, les lignes de courant sont des droites parallèles sur chacune desquelles la vitesse du fluide est constante. Dans l'autre, les lignes tourbillonnaires sont des cercles ayant même axe.

L'auteur emploie le *Calcul différentiel absolu* de M. Ricci. Une addition à cette Note se trouve dans le Tome LXII, à la page 175.

Boggio (*T.*). — [T2*aδ*] Sur l'équilibre des membranes élastiques planes (619-636).

Problème déjà traité par l'auteur (*Atti* de Turin, t. XXXV, 1900 et *Nuovo Cimento*, 4e série, t. XII, 1900) en supposant que la membrane soit soumise au contour à des forces agissant dans le plan de la membrane, que l'on connaît en tout point du contour les composantes du déplacement et que l'aire soit représentable uniformément sur un cercle au moyen de polynomes. Ici, il suppose que la représentation de l'aire sur le cercle ait lieu au moyen de fonctions rationnelles. La solution est exprimée (comme dans l'autre cas) par des intégrales définies.

Favaro (*A.*). — [V7] Amis et correspondants de Galilée. — IV.

Alexandra Bocchineri. — V. François Rasi. — VI. Jean François Buonamici (665-701).

Favaro (*A.*). — [V 7] Les documents du procès de Galilée (757-806).

T. LXII, 1902-1903.

Cassani (*P.*). — [K 22*a*] Sur la projection stéréoscopique (35-43).

Une addition à cette Note se trouve à la page 1153.

Favaro (*A.*). — [V 7] Amis et correspondants de Galilée. — VII. Jean Ciampoli (91-145).

Andreini (*A.*). — [K 14] Recherches sur les polyèdres et sur les réseaux autocorrélatifs (147-173, 1 planche).

Première Partie.

L'auteur étend la notion de polyèdre, en admettant des faces courbes et en considérant des faces monolatérales et bilatérales et des angles solides à *une* ou à *deux* arêtes. L'*ordre* d'une face est le nombre de ses côtés, en tenant compte de la multiplicité que peut avoir un sommet; l'*ordre* d'un angle solide est défini d'une manière analogue. Deux polyèdres sont corrélatifs lorsqu'à un angle m-èdre de l'un correspond une face m-latère de l'autre et réciproquement. Ils sont *complètement corrélatifs* lorsqu'à toute arête (p, q) $[r, s]$ du premier (qui est commune à deux faces p-latère et q-latère respectivement et unit les sommets de deux angles r-èdre et s-èdre respectivement), correspond dans le second polyèdre une arête $[p, q]$, (r, s). Un polyèdre est autocorrélatif si le nombre et l'ordre des faces sont égaux au nombre et à l'ordre des angles solides, et l'on peut avoir une autocorrélativité *complète* ou *partielle*. La détermination des polyèdres complètement autocorrélatifs dépend de la résolution en nombres entiers et positifs du système

$$e_1 + e_2 + \ldots + e_p = \frac{C+2}{2},$$
$$1e_1 + 2e_2 + \ldots + pe_p = 2C,$$

e_i étant le nombre des faces (et des angles) d'ordre i, et C le nombre des arêtes. L'élimination de C donne

$$\sum_1^n {}_r (4 - r) e_r = 4,$$

et de là l'auteur déduit tous les polyèdres autocorrélatifs, les ayant préalable-

ment distingués en classes, suivant qu'ils contiennent des éléments du troisième ordre, ou des éléments du deuxième sans en contenir du troisième ou du premier ordre sans en contenir du deuxième et du troisième.

Viterbi (*A.*). — [S2c] Addition à la Note *Sur une classe de mouvements tourbillonnaires permanents* (175-176).

La Note est dans le Tome LXI, à la page 449. Ici, il répond à une objection, en montrant que le cas du mouvement parallèle à un plan fixe est compris dans le second des mouvements mentionnés dans la Note.

Varisco (*B.*). — [V1] Les mondes semblables et la relativité de l'espace (333-348).

D'Emilio (*R.*). — [J2e] Illustrations géométriques et mécaniques des principes des moindres carrés (363-394, 1 planche).

Comme exemple citons la propriété suivante : Un point pesant libre, attiré par les points qui résultent des observations, proportionnellement aux distances et aux poids, tend à se disposer dans la position du point qu'on veut déterminer par les moindres carrés; et l'équilibre est stable.

Favaro (*A.*). — [V7] Vincent Viviani et sa *Vie de Galilée* (683-703).

Andreini (*A.*). — [K14] Recherches sur les polyèdres et sur les réseaux autocorrélatifs (729-764, 1 planche).

Seconde Partie.

L'auteur suppose

$$e_1 = e_2 = \ldots = e_r = \ldots = e$$

et considère ainsi des polyèdres corrélatifs qu'il appelle *uniformes*. L'équation de la première Note se réduit à la suivante :

$$e \sum_1^n {}_r (4 - r) = 4$$

ou bien

$$e = \frac{4}{D}$$

étant

$$D = \sum_1^n {}_r (4 - r).$$

La quantité D ne peut avoir que les valeurs 0, 4, 2, 1; et ces solutions sont classifiées en les divisant en deux genres :

I. Polyèdres.

II. Réseaux (constitués par un nombre infini d'éléments), et en subdivisant ces genres en espèces suivant l'ordre des éléments qu'ils renferment. Chaque espèce est étudiée en particulier, en déterminant la forme correspondante.

Severi (*F.*). — [$M_2 3a$] Sur la forme des surfaces réglées cubiques (863-879, 3 planches).

Ces surfaces sont classifiées en sept types au point de vue métrique, suivant que le plan de l'infini se trouve être :

a. Sécant.
b. Tangent de première espèce (passant par une génératrice).
c. Bitangent.
d. Tangent de deuxième espèce (tangent en un point de la ligne double).
e. Tangent de troisième espèce (passant par une génératrice cuspidale).
f. Tangent de quatrième espèce (tangent en un point cuspidal).
g. Tangent de cinquième espèce (tangent en tous les points d'une génératrice cuspidale).

Les cubiques réglées de Cayley (ayant la directrice double infiniment rapprochée de la directrice simple) sont distinguées en quatre types suivant que le plan de l'infini est :

a. Sécant.
b. Tangent de première espèce.
c. Tangent de deuxième espèce.
d. Tangent singulier (tangent en tous les points de la directrice double).

Ces surfaces sont étudiées au moyen de leur représentation sur le plan. Elles sont en général des surfaces unilatérales.

Finzi (*A.*). — [$M_2 8a$ ref. Q2] Les hypersurfaces à trois dimensions qui peuvent se représenter conformément sur l'espace euclidien (1049-1062).

Conditions de représentabilité obtenues au moyen du *Calcul différentiel absolu* de M. Ricci. Transformation de ces conditions, en introduisant les éléments intrinsèques.

Magini (*R.*). — [R1] Sur les accélérations d'ordre supérieur (1063-1081).

Exposition analytique des propriétés trouvées géométriquement par Schell (*Theorie der Bewegung und der Kräfte*). Propriétés nouvelles concernant les systèmes plans rigides.

Favaro (*A.*). — [V7] Pour l'histoire des manuscrits de Galilée (1083-1103).

Cassani (*P.*). — [K 22 *a*] Addition à la Note précédente *Sur la projection stéréoscopique* (1153-1154).

La Note est à la page 35 de ce Tome.

Viterbi (*A.*). — [S 2 *e* α] Sur les mouvements spontanés d'un solide plongé dans un liquide indéfini (1283-1328).

En appliquant une méthode donnée par M. Levi-Civita (*Rend. dei Lincei*, 1901), l'auteur étudie les mouvements stationnaires d'un solide plongé, dans le cas de Clebsch (*Math. Ann.*, t. III), Stekloff (*Math. Ann.*, t. XLII) et Liapounoff (*Kharkoff's Gesellschaft*, 1893), dans lesquels le problème se réduit aux quadratures. Dans ces cas, outre les intégrales de la conservation de l'énergie, du mouvement du barycentre et des aires, on connaît une autre intégrale qui, dans le premier des trois cas de Clebsch, est linéaire; dans les deux derniers cas de Clebsch ainsi que dans ceux de Stekloff et de Liapounoff, cette intégrale est quadratique. Dans ces cas, où l'intégrale ultérieure est quadratique, l'auteur trouve de nouveaux types de mouvements stationnaires, et l'intégration de leurs équations différentielles se fait au moyen des fonctions elliptiques. Tous les mouvements trouvés satisfont aux conditions de stabilité.

Dans le Tome suivant, à la page 873, il y a le développement du calcul pour trouver les formules relatives à ces mouvements au moyen des fonctions elliptiques.

T. LXIII, 1903-1904.

Favaro (*A.*). — [V 7] Amis et correspondants de Galilée. — IX. Jean-Camille Gloriosi (1-48).

D'Arcais (*F.*). — [M_1 2 *c* α ref. G 1 *c*] Sur le théorème de Riemann-Roch (99-103).

Lorsqu'on veut construire une fonction finie qui devienne infinie seulement aux points d'un groupe donné, il peut arriver qu'on trouve la valeur zéro pour quelques-unes des constantes qui doivent multiplier les intégrales abéliennes correspondant aux points donnés, et que, par suite, la fonction obtenue ne devienne infinie qu'en quelques-uns des points donnés. L'auteur détermine la condition qui doit être satisfaite par le groupe des points donnés, afin que cela n'arrive pas.

Favaro (*A.*). — [V 7] Amis et correspondants de Galilée. — X. Jean-Baptiste Agucchi (167-187).

Zanon (*G.-A.*). — [S 2] Sur la cause supposée des cavités engendrées par l'hélice dans l'eau. Théorie et applications pratiques (239-264).

Favaro (*A.*). — [V] Sur l'auteur présumé de la : *Artis metrice practice compilatio*, publiée par Maximilien Curtze (377-395).

Dell'Agnola (*C.-A.*). — [D6*a*] Nouvelle démonstration de la continuité des fonctions algébriques (415-422).

Cisotti (*U.*). — [S2*e*] Sur le paradoxe de d'Alembert (423-426).

La conclusion de d'Alembert, que la résistance rencontrée par une sphère qui se meut uniformément dans un fluide indéfini est égale à zéro, peut s'étendre à un corps de forme quelconque.

Fubini (*G.*). — [C4*d*] Sur les métriques définies par une forme d'Hermite (501-513).

Dans son Mémoire : *Sulle forme quadratiche ed hermitiane e sui sistemi di tali forme* (*Mem. delle Accad. Gioenia di Catania*, 1903), l'auteur a démontré que, semblablement à ce qui arrive pour une forme quadratique réductible au type

$$z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 \pm z_n^2,$$

au groupe G, reproducteur d'une forme hermitienne réductible à la forme

$$z_1 z_1^0 + \ldots + z_{n-1} z_{n-1}^0 \pm z_n z_n^0$$

(z_i^0 étant la quantité conjuguée de z_i), correspond un groupe Γ de mouvements dans une métrique. Cette métrique et le groupe Γ correspondant se définissent de la manière suivante :

On pose

$$\frac{z_i}{z_n} = u_i = x_i + iy_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$u_i^0 = x_i - iy_i.$$

Au groupe G de transformations linéaires sur les variables homogènes

$$z_k \; (k = 1, 2, \ldots, n)$$

correspond un groupe projectif sur les u_i, dont toute opération est déterminée lorsqu'on donne les opérations relatives sur les x_i, y_i. Le groupe réel sur ces x_i, y_i est le groupe Γ qui transforme en elle-même la quadrique

$$(1) \qquad \sum_{n-1}^{1} (x_i^2 + y_i^2) \pm 1 = 0.$$

Étant donnés deux points (x_i, y_i), $(x_i^{(1)}, y_i^{(1)})$ et

$$u_i = x_i + iy_i,$$
$$v_i = x_i^{(1)} + iy_i^{(1)},$$

l'expression

$$A = \frac{\left(\sum u_i v_i^0 \pm 1\right)\left(\sum u_i^0 v_i \pm 1\right)}{\left(\sum u_i u_i^0 \pm 1\right)\left(\sum v_i v_i^0 \pm 1\right)}$$

est un invariant pour toutes les transformations

$$(2) \qquad u'_i = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} u_k + a_{in}}{\sum a_{nk} u_k + a_{nn}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

à déterminant $+1$, transformant en elle-même l'équation (1), c'est-à-dire l'équation

$$\sum u_i u_i^0 \pm 1 = 0.$$

L'auteur fait une étude de la métrique considérée, c'est-à-dire des transformations (2). Les propriétés trouvées auront leur application, ainsi que l'auteur l'annonce dans un Mémoire de l'Académie de *Catania*. Citons la définition de *distance* δ des points (x_i, y_i), $(x_i^{(1)}, y_i^{(1)})$, qui est donnée au moyen de l'invariant A par la formule

$$\delta = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{A} + \sqrt{A-1}}{\sqrt{A} - \sqrt{A-1}}.$$

Alessio (*A.*). — [U] Sur les circonstances de plus petite variation de l'azimut d'un astre par rapport au temps, à latitudes différentes (515-544, 3 Tableaux, 2 planches).

Rossi (*L.-V.*). — [T2*b*] Sur une loi d'adaptement graduel à l'effort et de solidarité dans la résistance entre les éléments de certains matériaux de construction (551-581).

S. Rindi.

ERRATUM.

Page 36, après la ligne 9, *ajouter :*

Tome VII, 1909-1910, et Supplement.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXIX.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXXIX; 1915. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annali di Matematica pura ed applicata. Serie II, T. XXVI, 1897 (5-10); serie III, T. I et II, 1898-1899 (23-36); serie III, T. III, IV et V, 1899-1900 (54-71); T. VI, 1901 (78-90).

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. T. XLIX, 1913-1914 (71-77).

Atti del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti. T. IX-XIII, 1900-1904 (141-152).

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. 158, 1914 (42-54); T. 159, 1914 (90-94).

Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. CXLIII, 1913 (11-22 et 95-121).

Memorie della R. Accademia delle Scienze del Istituto di Bologna. T. VIII, 1910-1911 (36-42).

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, T. XI-XIII. 1897-1898 (122-140).

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Albenga (G.). 74.
Alessio (A.). 152.
Almansi (E.). 30-31.
Amans. 94.
Amici (N.). 123.
Andoyer (H.). 44.
Andrade (J.). 45.
Andreini (A.). 147-148, 148-149.
Angelesco. 52.
Anghelutza (Th.). 44.
Antoniazzi (A.). 141, 145.
Appell (P.). 45, 52, 92, 94.
Arcais (F. d'). 145, 150.
Armanini (E.). 60-61.
Armellini (G.). 44, 46, 51.
Arzéla (C.). 37.
Backlund (R.). 54.
Bagnera (G.). 27-28, 34, 125.
Baire (R.). 54-55.
Ballif (L.). 51.
Bartel (K.). 53.
Batiele (E.). 47.
Beltrami (E.). 10.
Bernstein (S.). 45, 52.
Berzolari (L.). 5-6, 139.
Bianchi (L.). 31-32, 57-59, 59-60, 68-69, 80-81.
Bigiavi (C.). 67-68.
Bilimovitch. 48.
Blaschke (W). 47, 49.
Boggio (T.). 141-143, 145, 146.
Bohr (H.). 54, 111-112.
Bompiani (E.). 72-73.
Bordigo (G.). 145-146.
Borel (E.). 42.
Bottasso (M.). 74, 75.
Bottari (A.). 34.
Boulad-Bey (F.). 91.
Bouliguine (B.). 45, 52.
Boussinesq (J.). 52, 53, 91, 92.
Brandt (H.). 101-104.
Bricard (R.). 43.
Brioschi (F.). 9-10.
Bucca (F.). 125-126, 139.
Buhl (A.). 44, 47, 50, 54, 94.
Buhr (H.). 43.
Burali-Forti (C.). 124, 127, 132, 135.
Burgatti (P.). 41, 137.
Calò (B.). 60.
Canevazzi (S.). 36.
Cartan (E.). 44, 22, 121.
Cassani (P.). 147, 150.
Castelnuovo (G.). 81-82.
Cattaneo (P.). 145.
Cavani (F.). 39.
Cazzanigo (T.). 8-9, 24-25, 33.
Châtelet (A.). 44.
Cherubini (S.). 75.
Ciani (E.). 31, 65-66.
Cifarelli (F.). 32.
Cipolla (F.). 143.
Cisotti (U.). 151.
Clairin (J.). 48.
Considère. 48, 51, 52.
Cordone (G.). 138-139.
Cremona (L.). 10.
Dall' Acqua (A.). 78, 143-144.
Darboux (G.). 92, 93, 94.
Darmois (G.). 45.
Dell' Agnola (C.-A.). 82-83, 141, 151.
Denjoy (A.). 43, 47.
Dini (U.). 23-24, 34-36, 55-57, 61.

Donati (L.). 41-42.
Duhem (P.). 44, 93, 94.
Emilio (R. d'). 148.
Enriques (F.). 6-7, 81-82, 137-138, 144.
Esclangon (E.). 49.
Fano (G.). 6-7, 132, 136.
Favaro (G.-A). 77, 141, 146, 148, 150, 151.
Fejér (L.). 50.
Fekete (M.). 50.
Finzi (A.). 149.
Fournier. 92.
Franchis (M. de). 122-123, 126.
Franck (Ph.). 43, 45.
Fubini (G.). 75-76, 143, 151-152.
Gambier. 43, 44, 46, 49.
Garnier (R.). 91, 140.
Gau (P.-E.). 46.
Gebbia (M.). 89-90.
Gegenbauer (L.). 133-134.
Gerbaldi (F.). 134-135.
Gevrey (M.). 51.
Globa-Mikhailanco (B.). 93.
Godeaux (L.). 47, 50, 94.
Goloubeff (W.). 50.
Gordan (P.). 140.
Goursat (E.). 42.
Gronwalth (T.-H.). 51, 52.
Guadurci (F.). 36, 39, 40.
Gueritol. 93.
Guichard (C.). 47, 49, 53, 54, 94.
Guidice (F.). 140.
Gunther. 47, 48.
Guyon (E.). 45.
Hadamard (J.). 48.
Hancok (H.). 45.
Hardy (G.-H.). 48.
Haton de la Goupillière. 94.
Hermite (Ch.). 66-67.
Horn (J.). 112-115.
Humbert (G.). 43, 51, 53, 122.
Hurwitz (A.). 48.
Jager (F.). 46, 49.
Jentzsch (R.). 47.
Kampé de Fériet. 45.
Kantor (S.). 144.
Keraval (E.). 43.
Koenigs (G.). 53.
Korchmieder (L.). 119-121.
Kowalewski (G.). 46.
Krause (M.). 28-29.
Lallemand (Ch.). 50.
Lancklan (E.). 43.
Lattès (S.). 10, 71, 90.
Laura (E.). 71-72.
Lauricella (G.). 7-8, 62-63, 83, 128.
Lebesgue (H.). 90.
Lebon (Er.). 93.
Lecornu (H.). 92.
Levi (B.). 9, 32.
Levi-Civita (T.). 69-71, 143.
Lévy (P.). 48, 51.
Lichtenstein (L.). 18-22.
Lindlöff (E.). 44.
Littlewood (J.-E.). 53.
Lorenzoni (G.). 141, 145.
Lovett (E.-O.). 87.
Lusin (N.). 50.
Magin (R.). 149.
Malipiero (A.). 142-143.
Marcolongo (R.). 7, 88.
Mazurkiewicz (E.). 46.
Medolaghi (P.). 28, 136-137.
Mesnager (A.). 93.
Monaco-Aprile (L.). 136.
Montesano (D.). 29-30.
Moore (C.-N.). 52.
Morera (G.). 128.
Moulin (M.). 48, 50.
Muntz (Ch.). 53.
Nielsen (N.). 65, 78-80, 83-85.
Nörlund (N.-G.). 49, 50.
Ostrowski (A.). 116-118.
Pagliano (C.). 67.
Pal (G.). 43, 120-121.
Palatini (F.). 141.
Parenty (H.). 50.
Pascal (E.). 85-87.
Paschoud (M.). 90.
Patrick (J.-B.). 51.
Pcheborski (A.). 46.
Pensa (A.). 76, 77, 83.
Perna (A.). 140.
Perron (O.). 15-18.
Petrowitch (M.). 132.
Picard (E.). 49, 93.
Picciati (G.) 141, 146.
Pick (G.). 45.
Pieri (M.). 123-124.
Puncherle (S.). 38-39, 40, 62-63, 127-128.
Pirondini (G.). 67.
Platrier (Ch.). 42.
Poeschi (T.). 54.

Poincaré (H.). 128-132.
Polo (C.). 74.
Polya (G.). 45.
Pompéia (D.). 92.
Popovici (C.). 53.
Puglisi (M.). 140.
Rabut (Ch.). 47, 92, 93, 94.
Razzaboni (A.). 36, 37-38, 39-40, 174.
Remak (R.). 116.
Remoundos (G.). 44, 90.
Renard (P.). 53.
Reye (Th.) 64-65.
Ricci (C.-L.). 75.
Riesz (M.). 49, 51.
Righi (A.). 36.
Rindi (S.). 42, 77, 152.
Rosati (C.). 23.
Rosenblatt (A.). 46.
Rossi (L.-V.). 145, 152.
Roy (L.). 49, 50.
Sabinine (G.). 32-33.
Sanctis (L. de). 61.
Schlesinger (L.). 53.
Schottky (F.). 11-15.
Scorza (G.). 32.
Segre (C.). 74-75.
Severi (F.). 149.
Sierspinski (H.). 46.
Somigliena (C.). 72, 88-89.
Spineanu (C.). 91.
Steinitz (E.). 104-107.
Stoïlow (S.). 91.
Sturm (R.). 115-116.
Supantschitsch (R.). 51.
Tannenberg (W. de). 51.
Tanturri (A.). 60.
Tarnarider (Mlle Th.). 91.
Tedone (O.). 23, 29.
Terrocini (A.). 74.
Timerding (H.-E.). 26-27, 33-34, 61-62.
Tonelli (L.). 52, 54, 71.
Torelli (G.). 76.
Valcovici (V.). 43, 46.
Vallier (E.). 92.
Varisco (B.). 148.
Vercelli (E.). 75.
Villat (H.). 94.
Viterbi (A.). 10, 59, 135, 146, 148, 150.
Vivanti (G.). 133.
Volterra (V.). 124-125.
Weber (E.). 135-136.
Weyl (H.). 107-111.
Zanon (G.-A.). 141, 150.
Zervos (P.). 121.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXXIX.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
56372 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v.50
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math

Bulletin des sciences
mathématiques

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY